20

Demeter Krupka

GEOMETRICKÉ ASPEKTY TEORIE INVARIANTNÍCH LAGRANGEOVSKÝCH STRUKTUR

Kandidátská disertační práce

GEOMETRICKÉ ASPEKTY TEORIE INVARIANTNÍCH LAGRANGEOVSKÝCH STRUKTUR

Kandidátská disertační práce

Demeter Krupka

Katedra teoretické fyziky a astrofyziky
Přírodovědecká fakulta
university J. E. Purkyně v Brně

1975

Brno

1. Úvod

Tato práce je věnována základům geometrické teorie integrálních variačních problémů na fibrovaných varietách a formulaci některých výsledků, publikovaných v předcházejících autorových článcích, zejména [1, 2]. Tematicky zapadá do problematiky, studované mnohými současnými autory (viz např. Goldschmidt a Sternberg [3], Hermann [4, 5], Palais [6, 7], Śniatycki [8], Trautman [9, 10] a také Eells a Sampson [11], Kijowski [12, 13], Komorowski [14 - 16], Maurin [17] aj.) a motivované historicky - odhlédneme-li od samotných počátků variačního počtu (viz např. sborník [18]) - pracemi Hilbertovými, Noetherové, É. Cartana, Lepageovými a dalších (viz např. [19 - 22]).

Každý integrální variační problém je definován funkcí řezů dané fibrované variety, vznikající integrací jisté diferenciální formy (lagrangiánu), závislé na těchto řezech; tato funkce řezů je často nazývána funkce akce. V užším smyslu nám půjde o studium těch řezů, kterých předepsané "malé deformace" nemění funkční hodnotu funkce akce, a také o studium transformací podkladové fibrované variety, které v tom či jiném smyslu ponechávají invariantní uvažovanou funkci akce. Všechny naše úvahy budou probíhat v kategorii C^∞ konečněrozměrných reálných hausdorfovských parakompaktních diferencovatelných variet; nezabýváme se analytickou stránkou variačních problémů, kde patří např. problematika existence a diferencovatelnosti minim funkce akce, studovaná, ovšem za poněkud odlišných předpokladů, např. v pracích [6, 7, 17].

Náš přístup k uvažované třídě variačních problémů je založen na systematickém využití diferenciálních forem a vektorových polí. V tomto nejvíce navazujeme na klasické Lepageovy práce a na Hermannovy knihy [4, 5], obsahující ovšem dosti nepřesný výklad. Je třeba poznamenat, že mnoho současných autorů dává při formulaci základů variačního počtu přednost "klasickému" přístupu, založenému na využití tzv. Lagrangeovy funkce, nebo na druhé straně též přístupu, využívajícího složitějších morfizmů odpovídajících bandlů (viz např. [3, 7, 11, 17]); podle autorova mínění je použití diferenciálních forem přirozenější, lépe odpovídá integrální povaze uvažovaných variačních problémů a také spřesňuje teoretický výklad. Nehledíme-li na to, že pro diferenciální formy existuje široce rozpracovaný analytický aparát (integrace, derivování, Lieovy derivace aj.), který lze ve variačních úvahách přímo použít a který má jasný geometrický význam, další argumenty pro diferenciální formy lze najít v tzv. teorie pole (jakožto součástí variačního počtu), kde je třeba často uvažovat integrální variační funkcionály, sestavené z jediného (např. tenzorového) pole. Integrovaný výraz zde tudíž nelze jednoznačně rozdělit na "integrovanou funkci" a "objemový element" (t.j. pole objemového elementu).

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola práce je věnována výkladu obecné variační teorie na fibrovaných varietách. Obsahuje základní definice geometrických struktur a pojmů, které se ve variační teorii objevují, a také výsledky, které lze vyvodit bez speciálních předpokladů o množinách, na kterých funkci akce uvažujeme. V páté kapitole se zabýváme použitím obecné variační teorie v několika konkrétních situacích, vyskytujících se v praktických variačních úlohách. Pro doplnění výkladu i důkazy se odvoláváme na články [1, 2], ke kterým má předkládaná práce nejblíže.

Všechny objekty a morfizmy, se kterými budeme pracovat, patří do již spomínané kategorie. V obecné diferenciálně-geometrické terminologii se nejvíce přidržujeme knihy Langovy [23], v některých speciálních otázkách (diferenciální ideály a distribuce, Lieovy derivace, integrace forem), též Sternbergovy knihy [24]. Z označení, které používáme, připomeňme alespoň nejzákladnější. Je-li X varieta a $x \in X$ bod, tečný prostor k X v bodě x označujeme symbolem $T_x X$; TX označuje tečný bandl variety X. Symbolem Tf označujeme diferenciál morfizmu f, f^* označuje příslušné zobrazení, indukované na prostoru diferenciálních forem (tzv. pull-back). Standardní význam mají symboly d (vnější derivování forem), $i(\xi)$ (operace kontrakce forem vektorem ξ, často označována také $\xi \,\lrcorner$), $\vartheta(\xi)$ (operace Lieovy derivace podle vektorového pole ξ) a $\wedge$ (vnější součin). Pole reálných čísel označujeme R, n-rozměrný reálný eukleidovský prostor symbolem R^n. Pokud není výslovně označeno jinak, používáme v našich souřadnicových úvahách standardní sumační konvenci, podle které se sečítá přes dvojice stejných indexů bez vyznačování sumace. V částech práce, kde používáme teorii jetů, odvoláváme se nejvíce na Ehresmannův článek [25] a na Kolářovy přednášky [26]; r-jet zobrazení ξ v bodě x je označován symbolem $j^r_x \xi$.

2. Lagrangeovské struktury

Každou surjektivní submerzi v uvažované kategorii budeme nazývat fibrovanou varietou. Je-li $\pi : Y \longrightarrow X$ fibrovaná varieta a V otevřená množina v Y, pak každý izomorfizmus $\alpha : V \longrightarrow \alpha(V) \subset Y$, ke kterému existuje izomorfizmus $\alpha_0 : \pi(V) \longrightarrow \alpha_0(\pi(V)) \subset X$ takový, že

$$\pi\alpha = \alpha_0\pi ,$$

se nazývá lokálním automorfizmem fibrované variety π. Existuje-li izomorfizmus α_0, je určen jednoznačně a nazývá se π-projekcí lokálního automorfizmu α. Vektorové pole Ξ na Y, kterého lokální jednoparametrická grupa je tvořena lokálními automorfizmy fibrované variety π, se nazývá π-projektabilním. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby vektorové pole Ξ na Y bylo π-projektabilním, je existence vektorového pole ξ na X takového, že pro každé $y \in Y$ platí

$$T\pi . \Xi(y) = \xi(\pi(y)) .$$

Existuje-li takové vektorové pole ξ, je určeno jednoznačně a nazývá se π-projekcí vektorového pole Ξ. π-vertikální vektorová pole jsou definována podmínkou, že jejich π-projekce existue a je rovna nulovému vektorovému poli.

Předmět, studovaný v této práci, je zavedený v následující definici (porov. [9, 27]).

Definice 1. Každá dvojice (π, λ), ve které $\pi: Y \to X$ je fibrovaná varieta s n-rozměrnou orientabilní bazí X a λ n-forma na Y, se nazývá lagrangeovskou strukturou. n-forma λ se nazývá lagrangiánem lagrangeovské struktury (π, λ).

Všude v této práci předpokládáme, že je dána lagrangeovská struktura (π, λ), kde $\pi: Y \to X$ je fibrovaná varieta s n-rozměrnou bazí.

Nechť je dáno π-projektabilní vektorové pole Ξ s π-projekcí ξ, označme α_t^{Ξ} resp. α_t^{ξ} příslušné lokální jednoparametrické grupy. S pomocí vektorového pole Ξ lze libovolnému řezu γ fibrované variety π přiřadit jednoparametrický systém řezů

$$\gamma_t = \alpha_t^{\Xi} \gamma \alpha_{-t}^{\xi},$$

který z variačního hlediska považujeme za "malou deformaci" řezu γ. Jednoparametrický systém řezů γ_t nazýváme variací řezu γ, generovanou vektorovým polem Ξ.

Zvolme v X kompaktní n-rozměrnou podvarietu Ω s okrajem a označme symbolem $\Gamma_{\Omega}(\pi)$ množinu všech řezů fibrované variety π, definovaných na okolích množiny Ω. Vyberme na X orientaci a na Ω indukovanou orientaci. Vzniká reálná funkce

$$\Gamma_{\Omega}(\pi) \ni \gamma \to \lambda_{\Omega}(\gamma) = \int_{\Omega} \gamma^* \lambda \in R$$

nazývaná <u>funkcí akce</u> lagrangeovské struktury (π,λ) (na podvarietě Ω). Hlavním předmětem studia variačního počtu je chování funkce akce, zúžené na předem určenou podmnožinu řezů v $\Gamma_\Omega(\pi)$. Metoda studia spočívá v sledování změny funkční hodnoty $\lambda_\Omega(\gamma)$ při "malých deformacích" γ_t každého řezu γ z uvažované podmnožiny řezů. Zvolme π-projektabilní vektorové pole Ξ a řez $\gamma \in \Gamma_\Omega(\pi)$ a uvažujme variaci γ_t řezu γ, generovanou vektorovým polem Ξ. S použitím stejného označení jako výše vidíme, že vzniká funkce

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\ni t \longrightarrow \lambda_{\alpha_t^\xi(\Omega)}(\alpha_t^\Xi \gamma \alpha_{-t}^\xi) = \int_{\alpha_t^\xi(\Omega)} (\alpha_t^\Xi \gamma \alpha_{-t}^\xi)^* \lambda \in R,$$

definovaná pro jisté $\varepsilon > 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny izomorfizmy α_t^ξ zachovávají orientaci variety X. Věta o transformaci integrálu [24] spolu se základními vlastnostmi pull-backu diferenciálních forem [23] dává vztah

$$\int_{\alpha_t^\xi(\Omega)} (\alpha_t^\Xi \gamma \alpha_{-t}^\xi)^* \lambda = \int_\Omega \gamma^* \alpha_t^* \lambda .$$

α_t^Ξ

Derivováním podle t v bodě $t=0$ tedy dostaneme

$$\left\{\frac{d}{dt}\lambda_{\alpha_t^\xi(\Omega)}(\alpha_t^\Xi \gamma \alpha_{-t}^\xi)\right\}_0 = \int_\Omega \gamma^* \vartheta(\Xi)\lambda .$$

α_t^ξ

Získaný výraz je mírou "citlivosti" funkce akce na změnu argumentu γ, generovanou vektorovým polem Ξ. Vznikající funkci

$$\Gamma_\Omega(\pi)\ni\gamma \longrightarrow (\vartheta(\Xi)\lambda)_\Omega(\gamma) = \int_\Omega \gamma^* \vartheta(\Xi)\lambda \in R$$

nazýváme první variací funkce akce, generovanou na Ω vektorovým polem Ξ. V souvislosti s tím definujeme:

Definice 2. Řez $\gamma \in \Gamma_{\Omega}(\pi)$ se nazývá Ξ-stacionárním řezem lagrangeovské struktury (π, λ) na Ω, když anuluje první variaci funkce akce, generovanou na Ω vektorovým polem Ξ, t.j. když platí

$$\int_{\Omega} \gamma^* \partial(\Xi) \lambda = 0.$$

Z Definice 2 vyplývá, že teorie Lieovych derivací bude významným nástrojem zkoumání stacionárních řezů lagrangeovských struktur. Podobně tomu je i v některých dalších variačních úlohách, spojených s transformacemi symetrie funkce akce. Nicméně autorovi není známá práce, která by tuto geometrickou teorii systematicky aplikovala na variační počet.

Základní úlohou, kterou se budeme zabývat, je studium řezů fibrované variety π, splňujících předepsaný systém parciálních diferenciálních rovnic a zároveň stacionárních vůči variacím, permutujícím řešení těchto rovnic. Budeme uvažovat parciální diferenciální rovnice, které připouští přímou geometrickou interpretaci, totiž rovnice, dané ve formě tzv. diferenciálního ideálu - ideálu ve vnější algebře všech diferenciálních forem (viz např. [4, 5, 24]); nebudeme ovšem předpokládat, že tento ideál je uzavřený vůči operaci vnější derivace forem.

Nechť $\mathfrak{A}$ je diferenciální ideál na Y. Řez γ fibrované variety π se nazývá integrálním řezem (integrální podvarietou) diferenciálního ideálu $\mathcal{Q}$, platí-li

$$\gamma^* \rho = 0$$

pro všechna $\rho \in \mathcal{Q}$. Množina všech integrálních řezů diferenciálního ideálu $\mathcal{Q}$ bude označována symbolem $\Gamma_{\mathcal{Q}}$. Našim cílem bude studovat funkci akce lagrangeovské struktury (π, λ), zúženou na množinu $\Gamma_{\mathcal{Q}}$; z toho vyplývá požadavek, aby všechny uvažované variace řezů z $\Gamma_{\mathcal{Q}}$ patřily množině $\Gamma_{\mathcal{Q}}$ a jen této množině.

Uvažujme lokální automorfizmus α fibrované variety π, definovaný na otevřené množině V; α přiřazuje diferenciálnímu ideálu $\mathcal{Q}$ nový diferenciální ideál $\alpha^*\mathcal{Q}$, tvořený všemi diferenciálními formami tvaru $\alpha^*\rho$, kde $\rho \in \mathcal{Q}$. Položme $\mathcal{U} = \pi(V)$.

Definice 3. Lokální automorfizmus α fibrované variety π nazveme $\mathcal{Q}$-přípustným, když každý integrální řez γ diferenciálního ideálu $\mathcal{Q}$, definovaný na množině $\mathcal{U}$, je zároveň integrálním řezem diferenciálního ideálu $\alpha^*\mathcal{Q}$. Říkáme, že π-projektabilní vektorové pole Ξ generuje $\mathcal{Q}$-přípustné variace fibrované variety π, nebo také že je $\mathcal{Q}$-přípustné, když jeho lokální jednoparametrická grupa je tvořena $\mathcal{Q}$-přípustnými lokálními automorfizmy fibrované variety π.

Označíme-li α_0 π-projekci lokálního automorfizmu α z Definice 3, pak α je $\mathcal{Q}$-přípustný lokální automorfizmus tehdy a jen tehdy, když z $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}}$ plyne $\alpha\gamma\alpha_0^{-1} \in \Gamma_{\mathcal{Q}}$. $\mathcal{Q}$-přípustné lokální automorfizmy tedy v tomto smyslu permutují řezy diferenciálního ideálu $\mathcal{Q}$. Následující věta je přímým důsledkem definic.

Věta 1. π-projektabilní vektorové pole Ξ generuje $\mathcal{J}$-přípustné variace řezů fibrované variety π tehdy a jen tehdy, když z $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{J}}$ vyplývá

$$\gamma^{*} \partial(\Xi) \rho = 0$$

pro všechna $\rho \in \mathcal{J}$.

Podobně zavádíme "kompaktní" deformace řezů, t.j. deformace, různé od identické transformace pouze na kompaktních podmnožinách báze uvažované fibrované variety. Připomeňme si, že <u>nosič</u> vektorového pole je definován jako nejmenší uzavřená množina, vně které je toto vektorové pole nulové.

Definice 4. Nechť Ξ je π-vertikální vektorové pole, α_t^{Ξ} jeho lokální jednoparametrická grupa, Ω kompaktní n-rozměrná podvarieta v X s okrajem. Říkáme, že Ξ generuje <u>$\mathcal{J}$-přípustné variace</u> fibrované variety π <u>na podvarietě Ω</u>, když jeho nosič je podmnožina v $\pi^{-1}(\Omega)$ a z podmínky $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{J}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$ vyplývá $\alpha_t^{\Xi}\gamma \in \Gamma_{\mathcal{J}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$ pro všechna dostatečně malá t.

Přímým výpočtem lze dokázat větu, charakterizující diferenciální ideály $\mathcal{J}$ se stejnými množinami $\mathcal{J}$-přípustných vektorových polí.

Věta 2. Nechť $\mathcal{J}$ je diferenciální ideál na Y, α lokální automorfizmus fibrované variety π. Pak π-projektabilní vektorové pole Ξ je $\mathcal{J}$-přípustné tehdy a jen tehdy, když je $\alpha^*\mathcal{Q}$ -přípustné.

Nyní zformulujeme základní definici o stacionárních řezech lagrangeovských struktur.

Definice 5. Nechť $\mathcal{Q}$ je diferenciální ideál na Y, Ω kompaktní n-rozměrná podvarieta v X s okrajem. Říkáme, že řez $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$ je <u>$\mathcal{Q}$-kritickým řezem</u> lagrangeovské struktury (π,λ) <u>na podvarietě Ω</u>, je-li Ξ-stacionárním na Ω pro každé vektorové pole Ξ, generující $\mathcal{Q}$-přípustné variace na podvarietě Ω. Řez γ se nazývá <u>$\mathcal{Q}$-kritickým řezem</u> lagrangeovské struktury (π,λ), je-li $\mathcal{Q}$-kritickým na každé podvarietě Ω ze svého definičního oboru.

$\mathcal{Q}$-kritické řezy jsou tedy charakterizovány podmínkou, že anulují první variaci funkce akce na každé kompaktní podvarietě s okrajem, která má stejnou dimenzi jako báze uvažované fibrované variety; první variace funkce akce je přitom generována vektorovými poli, jež "přípustným způsobem". (t.j. uvnitř množiny $\Gamma_{\mathcal{Q}}$) "deformují" řezy fibrované variety na kompaktních podmnožinách báze.

Na pojem $\mathcal{Q}$-přípustných variací navazují definice význačných transformací dané lagrangeovské struktury. Nechť $\mathcal{Q}$ je diferenciální ideál na Y, α $\mathcal{Q}$-přípustný lokální automorfizmus fibrované variety π, definovaný na otevřené množině V, nechť $U = \pi(V)$.

Definice 6. Říkáme, že α je <u>transformací $\mathcal{Q}$-invariance</u> lagrangeovské struktury (π,λ), když platí

$$\gamma^* \alpha^* \lambda = \gamma^* \lambda$$

pro každý řez $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ fibrované variety π, definovaný v $\mathcal{U}$. Říkáme, že α je zobecněnou transformací $\mathcal{D}$-invariance lagrangeovské struktury (π, λ), když pro každou kompaktní n-rozměrnou podvarietu $\Omega \subset \mathcal{U}$ s okrajem platí

$$\int_\Omega \gamma^* \partial(\Xi) \alpha^* \lambda = \int_\Omega \gamma^* \partial(\Xi) \lambda$$

pro všechna vektorová pole Ξ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace na Ω, a pro všechny řezy $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_\Omega(\pi)$. Říkáme, že vektorové pole generuje transformace $\mathcal{D}$-invariance (resp. zobecněné transformace $\mathcal{D}$-invariance) lagrangeovské struktury (π, λ), když jeho lokální jednoparametrická grupa je tvořena transformacemi $\mathcal{D}$-invariance (resp. zobecněnými transformacemi $\mathcal{D}$-invariance).

Snadno se dokáže platnost dvou následujících vět.

Věta 3. $\mathcal{D}$-přípustné vektorové pole Ξ generuje transformace $\mathcal{D}$-invariance lagrangeovské struktury (π, λ) tehdy a jen tehdy, když platí

$$\gamma^* \partial(\Xi) \lambda = 0$$

pro všechny řezy $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{D}}$.

Věta 4. Vektorové pole Θ generuje zobecněné transformace $\mathcal{D}$-invariance tehdy a jen tehdy, když pro každou kompaktní n-rozměrnou podvarietu $\Omega \subset X$ s okrajem platí

$$\int_\Omega \gamma^* \partial(\Xi) \partial(\Theta) \lambda = 0$$

pro všechna vektorová pole Ξ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace řezů fibrované variety π na Ω a pro všechny řezy $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$.

Uvažujme libovolné π-projektabilní vektorové pole Θ a s ním spojenou lagrangeovskou strukturu $(\pi, \hat{\nu}(\Theta)\lambda)$. Generuje-li vektorové pole Θ zobecněné transformace $\mathcal{D}$-invariance lagrangeovské struktury (π, λ), pak každý integrální řez diferenciálního ideálu $\mathcal{D}$ je $\mathcal{D}$-kritickým řezem lagrangeovské struktury $(\pi, \hat{\nu}(\Theta)\lambda)$. Je tedy zřejmé, že existence vektorových polí, generujících zobecněné transformace invariance, bude mít velký význam pro studium vlastností lagrangeovských struktur.

Zavedeme nakonec širokou třídu transformací lagrangeovské struktury (π, λ), spojenou - na rozdíl od transformací $\mathcal{D}$-invariance a zobecněné $\mathcal{D}$-invariance - s kritickými řezy dané lagrangeovské struktury. Nechť symboly $\mathcal{D}$, α, V a $\mathcal{U}$ mají stejný význam jako výše.

Definice 7. Lokální automorfizmus α se nazývá <u>transformací $\mathcal{D}$-symetrie</u> nebo prostě <u>$\mathcal{D}$-symetrií</u> $\mathcal{D}$-kritického řezu γ lagrangeovské struktury (π, λ), když pro každou kompaktní n-rozměrnou podvarietou $\Omega \subset X$ s okrajem, která leží v definičním oboru řezu γ, platí

$$\int_{\Omega} \gamma^{*} \hat{\nu}(\Xi) \alpha^{*} \lambda = 0$$

pro všechna vektorová pole Ξ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace lagrangeovské struktury (π, λ) na Ω.

Platí následující jednoduché tvrzení.

Věta 5. Nechť γ je $\mathcal{D}$-kritický řez lagrangeovské struktury (π, λ). $\mathcal{D}$-přípustné vektorové pole Ξ generuje $\mathcal{D}$-symetrie řezu γ tehdy a jen tehdy, když pro každou kompaktní n-rozměrnou varietu Ω s okrajem, která leží v definičním oboru řezu γ, platí

$$\int_{\Omega} \gamma^* \mathcal{J}(\theta) \mathcal{J}(\Xi) \lambda = 0$$

pro všechna vektorová pole θ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace na Ω.

Věta 5 ukazuje, jak hledat $\mathcal{D}$-kritické řezy dané lagrangeovské struktury s předepsanými vlastnostmi symetrie.

Věta 6. Nechť $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ a nechť Ξ je $\mathcal{D}$-přípustné vektorové pole s π-projekcí ξ a s příslušnými lokálními jednoparametrickými grupami α_t^{Ξ}, α_t^{ξ}. Pak jednoparametrický systém řezů $\alpha_t^{\Xi} \gamma \alpha_{-t}^{\xi}$ je tvořen $\mathcal{D}$-kritickými řezy lagrangeovské struktury (π, λ) tehdy a jen tehdy, když γ splňuje systém rovnic

$$\int_{\Omega} \gamma^* \mathcal{J}(\theta) \lambda = 0 , \qquad \int_{\Omega} \gamma^* \mathcal{J}(\theta) \mathcal{J}(\Xi) \lambda = 0$$

pro každou kompaktní n-rozměrnou varietu $\Omega \subset X$ s okrajem a všechna vektorová pole θ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace lagrangeovské struktury (π, λ) na Ω.

Třídy definovaných transformací, asociovaných s danou lagrangeovskou strukturou, nejsou navzájem nezávislé.

Věta 7. Každá transformace $\mathcal{D}$-invariance je zobecněnou transformací $\mathcal{D}$-invariance. Každá zobecněná transformace $\mathcal{D}$-invariance je transformací $\mathcal{D}$-symetrie každého $\mathcal{D}$-kritického řezu lagrangeovské struktury (π, λ).

Pro jednoduchost vyjádřování budeme každou z definovaných transformací nazývat prostě $\mathcal{D}$-symetrií lagrangeovské struktury (π, λ).

Nyní přejdeme k detailnějšímu vyšetřování $\mathcal{D}$-kritických řezů a $\mathcal{D}$-symetrií dané lagrangeovské struktury.

3. První variační formule

Nechť je dána fibrovaná varieta $\pi : Y \longrightarrow X$. Symbolem $J^r Y$ ($r \geq 0$ celé) budeme označovat množinu všech r-jetů (lokálních) řezů fibrované variety π s přirozenou diferencovatelnou strukturou, symboly $\pi_r : J^r Y \longrightarrow X$ a $\pi_{rs} : J^r Y \rightarrow J^s Y$ $(0 \leq s \leq r)$ fibrované variety, definované přirozenými projekcemi jetů. r-jetovou prolongaci řezu γ fibrované variety π označujeme $j^r \gamma$; je to řez fibrované variety π_r.

Připomeňme si, že diferenciální forma na Y se nazývá π-horizontální, když se anuluje vždy, je-li alespoň jeden z jejích argumentů π-vertikálním vektorem. Diferenciální forma ρ, definovaná na $J^r Y$, se nazývá pseudovertikální, platí-li pro každý řez γ fibrované variety π

$$j^r \gamma^* \rho = 0.$$

Označme $\Omega^n(J^r Y)$ prostor všech n-forem na $J^r Y$, $\Omega^n_X(J^r Y)$ prostor všech π_r-horizontálních n-forem.

Věta 8. Ke každé n-formě $\lambda \in \Omega^n(J^rY)$ existuje právě jedna n-forma $h(\lambda) \in \Omega^n_X(J^{r+1}Y)$ tak, že pro všechny řezy γ fibrované variety π platí

$$j^r\gamma^*\lambda = j^{r+1}\gamma^* h(\lambda).$$

Zobrazení

$$\Omega^n(J^rY) \ni \lambda \longrightarrow h(\lambda) \in \Omega^n_X(J^{r+1}Y)$$

je -lieární nad okruhem funkcí a vzájemně jednoznačné.

Pro důkaz a další vlastností zobrazení h, které lze definovat pro p-formy s libovolným p, se odvoláváme na práci [1]. Totéž platí o souřadnicových úvahách, které následují, i o Větě 9 a Větě 10.

Uvažujme na Y souřadnicové okolí s fibrovanými souřadnicemi (x_i, y_σ), $1 \le i \le n$, $1 \le \sigma \le m$, $n = \dim X$, $m = \dim Y - \dim X$, a označme $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma})$ s nimi asociované fibrované souřadnice na varietě J^1Y. Je-li n-forma λ reprezentována vztahem

$$\lambda = f_0\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s_1 < \ldots < s_r} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} \frac{1}{r!} f^{s_1 \ldots s_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}\, dx_1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dx_{s_1-1} \wedge dy_{\sigma_1} \wedge dx_{s_1+1} \wedge \ldots \wedge dx_{s_r-1} \wedge dy_{\sigma_r} \wedge dx_{s_r+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

pak

$$h(\lambda) = \Big(f_0 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s_1 < \ldots < s_r} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} f^{s_1 \ldots s_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r} z_{s_1\sigma_1} \ldots z_{s_r\sigma_r} \Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

V těchto vztazích (a také v dalším textu) latinské indexy probíhají hodnoty 1, 2,..., n, řecké indexy hodnoty 1, 2,..

..., m. V mnohých výpočtech je účelné používat formu $\pi_{10}^{*}\lambda$ místo formy λ (zde π_{10} je přirozená projekce $J^1Y \to J^0Y = Y$). Na uvažovaném souřadnicovém okolí lze tuto n-formu jednoznačně reprezentovat ve tvaru

$$\pi_{10}^{*}\lambda = \mathcal{L}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s_1 < \ldots < s_r} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} g_{\sigma_1}^{s_1} \cdots {}_{\sigma_r}^{s_r}\, dx_1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dx_{s_1 - 1} \wedge \omega_{\sigma_1} \wedge dx_{s_1+1} \wedge \ldots \wedge dx_{s_r - 1} \wedge \omega_{\sigma_r} \wedge dx_{s_r+1} \wedge \ldots \wedge dx_n ,$$

kde

$$\omega_\sigma = dy_\sigma - z_{k\sigma}\, dx_k$$

jsou pseudovertikální 1-formy. Nahradíme-li ve výše vypsané souřadnicové reprezentaci n-formy λ každou 1-formu dy_σ 1-formou ω_σ a zároveň odečteme přidané výrazy, dostaneme po výpočtu následující vztahy, svazující některé koeficienty obou vyjádření.

Věta 9. Platí relace

$$\mathcal{L} = f_0 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s_1 < \ldots < s_r} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} f_{\sigma_1}^{s_1} \cdots {}_{\sigma_r}^{s_r}\, z_{s_1\sigma_1} \cdots z_{s_r\sigma_r} ,$$

$$g_\sigma^s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{s\sigma}} .$$

Je vidět, že n-forma $\pi_{10}^{*}\lambda$ je rozložena (invariantním způsobem) na součet π_1-horizontální a pseudovertikální n-formy. Platí obecnější tvrzení.

Věta 10. Ke každé n-formě $\lambda \in \Omega^n(J^rY)$ existuje jediná

n-forma $h(\lambda) \in \Omega^n_X(J^{r+1}Y)$ a jediná pseudovertikální n-forma $p(\lambda)$ na $J^{r+1}Y$ tak, že

$$\pi^*_{r+1,r}\lambda = h(\lambda) + p(\lambda).$$

Aplikujeme-li naše úvahy na teorii lagrangeovských struktur, vidíme, že funkci akce lagrangeovské struktury (π, λ) na libovolné kompaktní n-rozměrné varietě $\Omega \subset X$ s okrajem lze napsat ve tvaru

$$\lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega j^1\gamma^* \pi^*_{10}\lambda = \int_\Omega j^1\gamma^* h(\lambda).$$

Budeme hledat první variaci $(\vartheta(\Xi)\lambda)_\Omega$ funkce akce, odpovídající tomuto vyjádření.

Uvažujme fibrované souřadnice (x_i, y_σ) a s nimi asociované fibrované souřadnice $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, z_{ij\sigma})$ na J^2Y $(i \leq j)$. Pro libovolnou funkci f proměnných $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma})$ označíme

$$d_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} \cdot z_{i\sigma} + \frac{\partial f}{\partial z_{j\sigma}} \cdot z_{ij\sigma}.$$

Výraz $d_i f$ definuje funkci lokálních souřadnic $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, z_{ij\sigma})$ nazývanou <u>formální derivací</u> funkce f podle proměnné x_i [28]. Nechť dále Ξ je libovolné π-projektabilní vektorové pole, ξ jeho π-projekce, α^Ξ_t a α^ξ_t příslušné lokální jednoparametrické grupy. Vztahem

$$j^r\alpha^\Xi_t(j^r_x\gamma) = j^r_{\alpha^\xi_t(x)}\alpha^\Xi_t\gamma\alpha^\xi_{-t}$$

je definována lokální jednoparametrická grupa $j^r\alpha^\Xi_t$ automorfizmů fibrované variety π_r. Tato grupa je generována vektorovým polem

$$j^r\Xi(j^r_t\gamma) = \left\{\frac{d}{dt} j^r\alpha^{\Xi}_t(j^r_t\gamma)\right\}_0 ,$$

které nazýváme r-jetovou prolongací π-projektabilního vektorového pole Ξ [1]. Snadno lze odvodit souřadnicovou reprezentaci vektorového pole $j^r\Xi$. Omezíme-li se na případ $r=1$ a napíšeme-li v našich fibrovaných souřadnicích

$$\Xi = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Xi_\sigma \frac{\partial}{\partial y_\sigma} ,$$

pak bude

$$j^1\Xi = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Xi_\sigma \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + \left(d_i\Xi_\sigma - z_{k\sigma}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial z_{i\sigma}} .$$

Hledaná formule pro první variaci funkce akce je založena na Větě 11.

Věta 11. Pro každou n-formu $\lambda \in \Omega^n(Y)$ a každé π-projektabilní vektorové pole Ξ platí

$$h(\vartheta(\Xi)\lambda) = \vartheta(j^1\Xi)\, h(\lambda).$$

Klasickými variačními postupy lze nyní snadno odvodit souřadnicovou formuli pro Lieovu derivaci $\vartheta(j^1\Xi)h(\lambda)$ lagrangiánu λ. Zavedeme-li funkci $\mathcal{L}$ lokálních souřadnic $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma})$ vztahem

$$h(\lambda) = \mathcal{L}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

a funkce $\varepsilon_\sigma(\mathcal{L})$, $1 \leq \sigma \leq m$, tzv. Eulerovy výrazy, asociované (v uvažovaných lokálních souřadnicích) s lagrangiánem λ, vztahem

$$\varepsilon_\sigma(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_\sigma} - d_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{i\sigma}}\right),$$

pak dostaneme tzv. <u>první variační formuli</u> v "infinitesimální" verzi [1].

Věta 12. Ve výše zavedených fibrovaných souřadnicích má n-forma $\pi_{21}^{*}\hat{v}(j^1\Xi)h(\lambda)$ souřadnicovou reprezentaci

$$\pi_{21}^{*}\hat{v}(j^1\Xi)h(\lambda) = \mathcal{L}_{\Xi}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n ,$$

kde funkce $\mathcal{L}_{\Xi}$ je dána vztahem

$$\mathcal{L}_{\Xi} = \mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{L}).(\Xi_{\sigma} - z_{i\sigma}\xi_i) + d_k\left(\mathcal{L}\xi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{k\sigma}}.(\Xi_{\sigma} - z_{i\sigma}\xi_i)\right).$$

Přitom uvedený rozklad n-formy $\pi_{21}^{*}\hat{v}(j^1\Xi)h(\lambda)$ na dva sčítance je nezávislý na použitých fibrovaných souřadnicích.

Abychom lépe pochopili geometrický význam první variační formule, uvažujme distribuci Δ_2 na J^2Y, generovanou na souřadnicovém okolí, pokrytém souřadnicemi $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, z_{ij\sigma})$, vektorovými poli

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + z_{i\sigma}\frac{\partial}{\partial y_\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial z_{i\sigma}}, \quad \frac{\partial}{\partial z_{ij\sigma}} .$$

Vyberme bod $j^2_x\gamma \in J^2Y$ z uvažovaného souřadnicového okolí a libovolný tečný vektor k varietě J^2Y v tomto bodě,

$$\tilde{\Xi} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Xi_\sigma \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + \Xi_{i\sigma}\frac{\partial}{\partial z_{i\sigma}} + \sum_{i\le j} \Xi_{ij\sigma}\frac{\partial}{\partial z_{ij\sigma}}$$

$(\xi_i, \Xi_\sigma, \Xi_{i\sigma}, \Xi_{ij\sigma} \in R)$; pak lze jednoznačně napsat rozklad

$$\tilde{\Xi} = h(\tilde{\Xi}) + v(\tilde{\Xi}),$$

ve kterém

$$h(\tilde{\Xi}) = \xi_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + z_{i\sigma}\frac{\partial}{\partial y_\sigma}\right) + \Xi_{i\sigma}\frac{\partial}{\partial z_{i\sigma}} + \sum_{i\le j}\Xi_{ij\sigma}\frac{\partial}{\partial z_{ij\sigma}} ,$$

patří distribuci Δ_2 a

$$v(\tilde{\Xi}) = (\Xi_\sigma - z_{i\sigma}\xi_i)\frac{\partial}{\partial y_\sigma}$$

doplňkové distribuci. Zaveďme Eulerovou formu, asociovanou s lagrangiánem λ, vztahem

$$E(\lambda) = \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{L}) \cdot dy_\sigma \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n ;$$

nezávislost výrazu na pravé straně na použitých fibrovaných souřadnicích lze dokázat přímým výpočtem. Použijeme-li výše diskutovaný rozklad pro 2-jetovou prolongaci π -projektabilního vektorového pole, můžeme dokázat první variační formuli v jiném tvaru.

Teorém 1. Pro libovolné π -projektabilní vektorové pole Ξ a libovolnou n-formu $\lambda \in \Omega^n(Y)$ platí

$$\pi_{21}^* h(\partial_{\Xi}\lambda) = i(v(j^2\Xi))E(\lambda) + h(d\, i(j^1\Xi)\,\pi_{10}^*\lambda).$$

Důkaz lze provést přímým výpočtem s využitím Věty 9, 11 a 12.

4. Kritické řezy

Vyberme v X kompaktní n-rozměrnou podvarietu Ω s okrajem $\partial\Omega$. Z Teorému 1 a ze Stokesovy věty o integraci diferenciálních forem na varietách s okrajem plyne, že pro libovolné π -projektabilní vektorové pole Ξ platí

$$(\tilde{\nu}(\Xi)\lambda)_{\Omega} = \int_{\Omega} j^2\gamma^* \pi_{21}^* \tilde{\nu}(j^1\Xi)\lambda$$

$$= \int_{\Omega} j^2\gamma^* i(\nu(j^2\Xi))E(\lambda) + \int_{\partial\Omega} j^1\gamma^* i(j^1\Xi)\pi_{10}^*\lambda .$$

Omezíme-li se na π-projektabilní vektorová pole Ξ s nosičem v $\pi^{-1}(\Omega)$, integrál přes hranici $\partial\Omega$ variety Ω vymizí a dostaneme:

Věta 13. Řez $\gamma \in \Gamma_{\Omega}(\pi)$ je Ξ-stacionárním tehdy a jen tehdy, když platí

$$\int_{\Omega} j^2\gamma^* i(\nu(j^2\Xi))E(\lambda) = 0 .$$

Nechť nyní $\mathcal{Q}$ je diferenciální ideál na Y. Snadno se prověří, že pro každé π-vertikální vektorové pole Ξ platí identita

$$i(\nu(j^2\Xi))E(\lambda) = i(j^2\Xi)E(\lambda) .$$

S přihlédnutím k definici $\mathcal{Q}$-kritických řezů lze tudíž zformulovat základní důsledek první variační formule takto:

Teorém 2. Řez $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$ je $\mathcal{Q}$-kritickým řezem lagrangeovské struktury (π, λ) na podvarietě Ω tehdy a jen tehdy, když platí

$$\int_{\Omega} j^2\gamma^* i(j^2\Xi)E(\lambda) = 0$$

pro všechna vektorová pole Ξ, generující $\mathcal{Q}$-přípustné variace lagrangeovské struktury (π, λ) na Ω. Řez γ je $\mathcal{Q}$-kritickým řezem tehdy a jen tehdy, když tento vztah je splněn nezávisle na výběru podvariety Ω .

5. Invariance

Uvažujme naši lagrangeovskou strukturu (π,λ) a diferenciální ideál $\mathcal{D}$ na Y . Po zavedení zobrazení h, přiřazujícího n-formám na Y π_1-horizontální n-formy na J^1Y, a po zavedení Eulerovy formy $E(\lambda)$, vystupující v první variační formuli (Teorém 1), lze upřesnit charakteristiky lokálních jednoparametrických grup $\mathcal{D}$-symetrií lagrangeovské struktury (π,λ).

Teorém 3 (<u>Rovnice Noetherové</u>). $\mathcal{D}$-přípustné vektorové pole Ξ generuje transformace $\mathcal{D}$-invariance lagrangeovské struktury (π,λ) tehdy a jen tehdy, když splňuje vztah

$$\partial(j^1\Xi)\,h(\lambda) = 0 .$$

(Tvrzení vyplývá z Věty 11.)

Teorém 4. π-projektabilní vektorové pole Θ generuje zobecněné transformace $\mathcal{D}$-invariance lagrangeovské struktury (π,λ) tehdy a jen tehdy, když pro každou kompaktní n-rozměrnou podvarietu $\Omega\subset X$ s okrajem platí

$$\int_\Omega j^2\gamma^*\, i(j^2\Xi)\, E(\partial(\Theta)\lambda) = 0$$

pro všechna vektorová pole Ξ , generující $\mathcal{D}$-přípustné variace lagrangeovské struktury (π,λ) na Ω a pro všechny řezy $\gamma = \Gamma_{\mathcal{D}} \cap \Gamma_{\Omega}(\pi)$.

(Tvrzení vyplývá z Věty 4 a Teorému 2, ve kterém nahradíme n-formu λ n-formou $\vartheta(\theta)\lambda$.)

Jistou modifikací Teorému 4 dostaneme relaci mezi $\mathcal{D}$-kritickými řezy a jejich lokálními jednoparametrickými grupami $\mathcal{D}$-symetrií:

Teorém 5. Nechť γ je $\mathcal{D}$-kritický řez lagrangeovské struktury (π, λ). $\mathcal{D}$-přípustné vektorové pole θ generuje $\mathcal{D}$-symetrie řezu γ tehdy a jen tehdy, když pro každou kompaktní n-rozměrnou varietu Ω s okrajem, která leží v definičním oboru řezu γ, platí

$$\int_{\Omega} j^2\gamma^* \, i(j^2\Xi)\, E(\vartheta(\theta)\lambda) = 0$$

pro všechna vektorová pole Ξ, generující $\mathcal{D}$-přípustné variace lagrangeovské struktury (π, λ) na Ω.

6. Příklady

Mnoho praktických úloh variační teorie a teorie pole spočívá v určení $\mathcal{D}$-kritických řezů nebo transformací $\mathcal{D}$-symetrie dané lagrangeovské struktury. V případě diferenciálních ideálů $\mathcal{D}$, které indukují dostatečně bohaté prostory $\mathcal{D}$-přípustných vektorových polí (t.j. dostatečně bohaté množiny "přípustných deformací" řezů), možno $\mathcal{D}$-kritické řezy charakterizovat pomocí parciálních diferenciálních rovnic; totéž platí o vektorových polích, generujících transformace $\mathcal{D}$-symetrie.

V této části práce zformulujeme příklady lagrangeovských struktur a diferenciálních ideálů, které mají popsanou vlastnost.

A) Obyčejné variační problémy prvního řádu.- Předpokládejme, že je dána lagrangeovská struktura (π, λ), kde $\pi : Y \to X$ je fibrovaná varieta s n-rozměrnou bazí X. Zformulujeme teorii $\mathcal{D}$-kritických řezů a teorii $\mathcal{D}$-invariance pro případ triviálního diferenciálního ideálu $\mathcal{D} = \{0\}$ na varietě Y. V tomto případě každý řez fibrované variety π patří množině $\Gamma_{\mathcal{D}}$. V souvislosti s tím budeme mluvit o <u>kritických řezech</u> (místo o $\mathcal{D}$-kritických řezech) lagrangeovské struktury (π, λ) a o <u>invarianci</u> (místo o $\mathcal{D}$-invarianci). Výsledky, které v dalším zformulujeme, jsou obsaženy (s mírnou modifikací) v článcích [1, 2].

Teorém. Řez γ fibrované variety π, definovaný na otevřené množině $\mathcal{U} \subset X$, je kritickým řezem lagrangeovské struktury (π, λ) na kompaktní n-rozměrné varietě $\Omega \subset X$ tehdy a jen tehdy, když se Eulerova forma $E(\lambda)$ anuluje na podvarietě $j^2\gamma(\Omega) \subset J^2Y$, t.j.

$$E(\lambda) \circ j^2\gamma = 0$$

na Ω. Řez γ je kritickým řezem lagrangeovské struktury (π, λ) tehdy a jen tehdy, když na $\mathcal{U}$ platí

$$E(\lambda) \circ j^2\gamma = 0.$$

Existuje přirozená relace ekvivalence v množině lagrangeovských struktur na dané fibrované varietě. Říkáme, že lagrangeovské struktury (π, λ_1), (π, λ_2) jsou ekvivalentní, když platí

$$E(\lambda_1) = E(\lambda_2) ,$$

t.j. když k nim příslušné Eulerovy formy jsou totožné. Je triviálním důsledkem definice Eulerovy formy, že dva lagrangiány λ_1, λ_2, splňující vztah

$$h(\lambda_1) = h(\lambda_2)$$

definují ekvivalentní lagrangeovské struktury. Vzhledem k R-lineární závislosti Eulerovy formy $E(\lambda)$ na λ je problém ekvivalence lagrangeovských struktur řešen následující větou.

Teorém. $E(\lambda) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $d\lambda = 0$.

Tento teorém upřesňuje některé klasické výsledky i chybné předpoklady o lagrangiánech, anulujících Eulerovou formu, které se poměrně často objevují v literatuře. Je také základem přesného popisu generátorů zobecněných transformací invariance.

Teorém. Nechť Ξ je π-projektabilní vektorové pole. Pak tři následující podmínky jsou ekvivalentní:

1) Ξ generuje zobecněné transformace invariance lagrangeovské struktury (π, λ).

2) Lieova derivace Eulerovy formy $E(\lambda)$ podle 2-jetové

prolongace $j^2\Xi$ vektorového pole Ξ je nulová,

$$\partial(j^2\Xi)E(\lambda) = 0.$$

3) Existuje taková n-forma $\rho \in \Omega^n(Y)$, že platí zobecněna Noether-Bessel-Hagenova relace

$$h(\partial(\Xi)\lambda - \rho) = 0, \quad d\rho = 0.$$

4) Platí

$$E(\partial(\Xi)\lambda) = 0.$$

Teorém. Množina všech π-projektabilních vektorových polí, generujících zobecněné transformace invariance lagrangeovské struktury (π, λ), je s přirozenou algebraickou strukturou Lieovou algebrou.

Pro transformace symetrie kritických řezů dostáváme tento výsledek:

Teorém. Nechť γ je řez fibrované variety π, Ξ nechť je π-projektabilní vektorové pole. Variace řezu γ, generována vektorovým polem Ξ, je tvořena kritickými řezy lagrangeovské struktury (π, λ) tehdy a jen tehdy, když platí relace

$$E(\lambda) \circ j^2\gamma = 0, \qquad E(\partial(\Xi)\lambda) \circ j^2\gamma = 0 :$$

Zformulovaný teorém ukazuje, že kritické řezy s předepsanými vlastnostmi symetrie představují řešení systému

Eulerovych-Lagrangeovych rovnic, daných lagrangiánem λ a lagrangiánem $\dot{\iota}(\Xi)\lambda$.

B) Obyčejné variační problémy druhého řádu. Kritické řezy.- Nechť $\pi : Y \to X$ je fibrovaná varieta s n-rozměrnou orientabilní bazí X, $\pi_1 : J^1Y \longrightarrow X$ její 1-jetová prolongace. Předpokládejme, že je dána lagrangeovská struktura (π_1, λ) a uvažujme diferenciální ideál na J^1Y, generovaný pseudovertikálními 1-formami

$$\omega_\sigma = dy_\sigma - z_{k\sigma} dx_k .$$

Určíme množinu Γ_{Ω} a vektorová pole, generující Ω-přípustné variace.

Věta. Řez δ fibrované variety π_1 je integrálním řezem diferenciálního ideálu Ω tehdy a jen tehdy, když existuje řez γ fibrované variety π tak, že

$$\delta = j^1\gamma .$$

Věta. π_1-projektabilní vektorové pole $\tilde{\Xi}$ generuje Ω-přípustné variace lagrangeovské struktury (π_1, λ) tehdy a jen tehdy, když je 1-jetovou prolongací jistého π-projektabilního vektorového pole Ξ,

$$\tilde{\Xi} = j^1\Xi .$$

Obecná lagrangeovská teorie ukazuje, že pro popis Ω-kritických řezů je třeba uvažovat n-formu $h(\lambda)$, která je definovaná na varietě $J^1(J^1Y)$, a příslušnou Eulerovou formu $E(\lambda)$, definovanou na varietě $J^2(J^1Y)$. Uvažujme libovolné fibrované souřadnice (x_i, y_σ) na Y, kde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$, $n = \dim X$, $m = \dim Y - \dim X$, s nimi asociované fibrované souřadnice $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma})$ na J^1Y a fibrované souřadnice $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, w_{i\sigma}, w_{ij\sigma})$ na $J^1(J^1Y)$. V těchto lokálních souřadnicích můžeme psát

$$h(\lambda) = \mathcal{L}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n ,$$

$$E(\lambda) = \left(\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{L})\, dy_\sigma + \mathcal{E}_{i\sigma}(\mathcal{L})\, dz_{i\sigma} \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n ,$$

kde

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_\sigma} - d_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{k\sigma}} \right) ,$$

$$\mathcal{E}_{i\sigma}(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{i\sigma}} - d_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ki\sigma}} \right) .$$

Přepišeme-li nyní Teorém 2 do naší situace, vidíme, že řez δ fibrované variety π_1 je Ω-kritickým řezem lagrangeovské struktury (π_1, λ) tehdy a jen tehdy, když existuje řez γ fibrované variety π tak, že $\delta = j^1\gamma$ a

$$\int_\Omega j^1\delta^{*}\, i(j^1(j^1\Xi))\, E(\lambda) = 0$$

pro každou n-rozměrnou kompaktní podvarietu $\Omega \subset X$ s okrajem a všechna π-vertikální vektorová pole Ξ s nosičem v $\pi^{-1}(\Omega)$.

Výraz za integrálem lze s použitím podmínky $\delta = j^1\gamma$ dále zjednodušit. K tomu je třeba zobecnit definici formální derivace, zavedené v Kapitole 3. Uvažujme fibrované souřadnice (x_i, y_σ) na Y a s nimi asociované fibrované souřadnice $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, \dots, z_{i_1 \dots i_r i_{r+1}\sigma})$ na varietě $J^{r+1}Y$. Nechť f

je funkce lokálních souřadnic $(x_i, y_\sigma, z_{i\sigma}, \dots, z_{i_1 \dots i_r \sigma})$; <u>formální derivací</u> funkce f podle proměnné x_i nazveme funkci

$$d_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} z_{i\sigma} + \frac{\partial f}{\partial z_{j\sigma}} \cdot z_{ij\sigma} + \dots + \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_r} \frac{\partial f}{\partial z_{i_1 \dots i_r \sigma}} \cdot z_{i_1 \dots i_r i \sigma},$$

definovanou na uvažovaném souřadnicovém okolí v $J^{r+1} Y$. Dále uvažujme naší lagrangeovskou strukturu (π_1, λ) a označme

$$\tilde{h}(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

zúžení n-formy $h(\lambda)$ na podvarietu $J^2 Y$ v $J^1(J^1 Y)$. Zaveďme $(n+1)$-formu $\tilde{E}(\lambda)$ na $J^4 Y$ vztahem

$$\tilde{E}(\lambda) = \tilde{\varepsilon}_\sigma(\tilde{\mathcal{L}})\, dy_\sigma \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n ;$$

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma(\tilde{\mathcal{L}}) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y_\sigma} - d_i \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial z_{i\sigma}} \right) + \sum_{i \leq j} d_i d_j \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial z_{ij\sigma}} \right).$$

Lze prověřit, že forma $\tilde{E}(\lambda)$ je definována nezávisle na použitých fibrovaných souřadnicích. Se zavedenými pojmy lze dokázat následující větu o $\mathcal{D}$-kritických řezech lagrangeovské struktury (π_1, λ), svazující abstraktní teorii lagrangeovských struktur s klasickými variačními přístupy.

Teorém. Řez δ je $\mathcal{D}$-kritickým řezem lagrangeovské struktury (π_1, λ) tehdy a jen tehdy, když existuje řez γ fibrované variety π, splňující systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\tilde{E}(\lambda) \circ j^4 \gamma = 0$$

a takový, že $\delta = j^1 \gamma$.

Důkaz lze provést poměrně složitým souřadnicovým výpočtem, založeným na rovnicích podvariety J^2Y v $J^1(J^1Y)$.

Vzhledem k tomu, že λ-kritické řezy jsou v uvažovaném případě lagrangeovských struktur jednoznačně určeny n-formou $\tilde{h}(\lambda)$, definovanou na J^2Y (nebo v souřadnicích funkcí $\tilde{\mathcal{L}}$), nazýváme studované variační problémy <u>obyčejnými variačními problémy druhého řádu.</u>

C) Celou řadu konkrétních lagrangeovských struktur lze najít v literatuře o variačním počtu i o matematických základech obecné teorie relativity. Pokud jde o obecnou teorii relativity, uvedeme alespoň jeden konkrétní příklad. Za bázi uvažovaných fibrovaných variet (většinou se strukturou vektorových bandlů) se zde bere 4-rozměrná varieta, připouštějící tzv. hyperbolickou strukturu (t.j. globálně definované kovariantní tenzorové pole druhého řádu, které v každém bodě definuje regulární symetrickou bilineární formu na tečném prostoru se signaturou (1,3)), tzv. prostoročas. Označme π 2-jetovou prolongaci bandlu kovariantních tenzorů nad takovou bází a zvolme lokální souřadnice x_i na této bazi. Lagrangián λ, definovaný (v indukovaných souřadnicích) vztahem

$$\lambda = R\cdot\sqrt{|\det \tilde{g}|}\; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n ,$$

ve kterém $\tilde{g}$ je matice kovariantního tenzoru $g = (g_{ij})$ a

$$R = R\left(g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right)$$

je tzv. skalární křivost, asociovaná s každou pseudoriemannovskou strukturou, definuje lagrangeovskou strukturu (π, λ). Při podobném výběru diferenciálního ideálu $\tilde{\omega}$ jako ve výše diskutovaném příkladě B) $\tilde{\omega}$-kritické řezy jsou řešeními tzv. Einsteinových rovnic pro vákuum; jsou to hyperbolická metrická pole na uvažované 4-rozměrné varietě, které extremalizují funkci akce, definovanou lagrangeovskou strukturou (π, λ).

Literatura

[1] D. Krupka, A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds. I. Critical sections, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975), 180 - 206

[2] D. Krupka, A geometric theory of ordinary first order variational problems in fibered manifolds. II. Invariance, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975), 469 - 476

[3] H. Goldschmidt, S. Sternberg, The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 203 - 267

[4] R. Hermann, Differential geometry and the calculus of variations, Academic Press, New York, 1968

[5] R. Hermann, Geometry, physics and systems, Dekker, New York, 1973

[6] R. S. Palais, Foundations of global nonlinear analysis, Benjamin, New York, 1968

[7] R. S. Palais, Manifolds of sections of fiber bundles and the calculus of variations, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 1, Chicago, Ill. (1968), 195 - 205, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1970)

[8] J. Śniatycki, On the geometric structure of classical field theory in Lagrangian formulation, Proc. Cambridge Philos. Soc. 68 (1970), 475 - 484

[9] A. Trautman, Invariance of Lagrangian systems, "General Relativity, Papers in Honour of J. L. Synge", Clarendon Press, Oxford, 1972

[10] A. Trautman, Noether equations and conservation laws, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 248 - 261

[11] J. Eells, Jr., J. H. Sampson, Variational theory in fibre bundles, Proc. U. S. - Japan Seminar in Differential Geometry, Tokyo, 1965

[12] J. Kijowski, Existence of differentiable structure in the set of submanifolds, an attempt of geometrization of calculus of variations, Studia Math. XXXIII (1969), 93 - 108

[13] J. Kijowski, On representation of functionals of local type by differential forms, Colloquium Math. XXVI (1972), 293 - 312

[14] J. Komorowski, A modern version of the E. Noether's theorems in the calculus of variations, I., Studia Math. 29 (1968), 261 - 273

[15] J. Komorowski, A modern version of the E. Noether's theorems in the calculus of variations, II., Studia Math. 32 (1969), 181 - 190

[16] J. Komorowski, A geometrical formulation of the general free boundary problems in the calculus of variations and the theorems of E. Noether connected with them, Rep. Math. Phys 1 (1970), 105 - 133

[17] K. Maurin, Calculus of variations and classical field

theory, Part I, Lecture Notes Series, Aarhus Universitet, Matematisk Institut (1972)

[18] Variacionnyje principy mechaniky, red. L. S. Polak, Moskva, 1959

[19] D. Hilbert, Grundlagen der Physik, Math. Ann. 92 (1924), 1 - 32

[20] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1918), 235 - 258

[21] E. Cartan, Lecons sur les Invariants intégraux, Hermann, Paris, 1922

[22] Th. H. J. Lepage, Sur les champs géodésiques du Calcul des Variations, Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci. V, Sér. 22 (1936), 716 - 729, 1036 - 1046

[23] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, New York, 1962

[24] S. Sternberg, Lectures on differential geometry, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964

[25] C. Ehresmann, Introduction a la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, Coll. Intern. du CNRS, Géométrie différentielle, Strasbourg (1953), 97 - 110

[26] I. Kolář, Úvod do teorie jetů (preprint) ČSAV Brno, 1972

[27] D. Krupka, A. Trautman, General invariance of Lagrangian structures, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. Sci Math. Astronom. Phys., XXII (1974), 207 - 211

[28] M. Kuranishi, Lectures on Involutive Systems of Partial

Differential Equations, Publicacoes da Sociedade
de Matematica de Sao Paulo, Sao Paulo, 1967