Sov. Phys.-Dokl (USA) vol. 30 no. 6
p. 458-60 (June 1985)

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1985

ТОМ 282 № 4

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 531 + 531.12/13:530.12 +537.8 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р.Я. МАЦЮК

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 9 VII 1984)

В последнее время возрос интерес к движению классических скалярных и спиновых частиц в калибровочных и гравитационных полях. Соответствующие уравнения обобщают уравнения Лоренца и Папапетру–Пирани [1, 2]. Между тем уже уравнения Матиссона–Папапетру с условием Пирани $u_\beta S^{\alpha\beta} = 0$ $(u^\alpha = \dot{x}^\alpha)$ приводят к уравнению движения третьего порядка [3]

$$(1)\qquad \begin{aligned} & m_0 \frac{Du^\alpha}{ds} = S^{\alpha\beta} \frac{D^2 u_\beta}{ds^2} - \frac{1}{2} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^\beta S^{\gamma\delta}, \\ & u_\beta u^\beta = 1. \end{aligned}$$

Уравнения Матиссона–Папапетру, как и более ранние уравнения Френкеля [4], выводятся из вариационного принципа многими авторами. Однако до сих пор не исследовался вопрос о существовании лагранжиана для уравнения Матиссона (1). С другой стороны, если частица не предполагается пробной, сила радиационного трения, входящая в уравнение движения, также содержит слагаемое третьего порядка [5], как, например, в уравнении Дирака–Лоренца

$$(2)\qquad m_0 \left[\frac{\dot{u}^\alpha}{\|u\|^2} - \frac{\dot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^4} u^\alpha \right] = \frac{e}{\|u\|} H^{\alpha\beta} u_\beta + $$
$$+ \frac{2e^2}{3} \left[\frac{\ddot{u}^\alpha}{\|u\|^3} - \frac{\ddot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^5} u^\alpha - 3 \frac{\dot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^5} \dot{u}^\alpha + 3 \frac{(\dot{u}_\beta u^\beta)^2}{\|u\|^7} u^\alpha \right].$$

Вопрос о существовании лагранжиана для уравнения Дирака–Лоренца до настоящего времени не был решен полностью [6]. Уравнение (2) инвариантно относительно изменения способа параметризации интегральной кривой. Если положить $m_0 = 0$ и $H^{\alpha\beta} = 0$, оно перейдет в уравнение геодезических окружностей, которое определяет гиперболическое движение релятивистских частиц и исследовалось в связи с проблемой равноускоренных систем отсчета [7].

Параметрически-инвариантную форму уравнений Матиссона (1) можно получить непосредственно из уравнений Диксона [8]

$$\frac{DP^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{1}{2} R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta} u^{\beta} S^{\gamma\delta}, \quad \frac{DS^{\alpha\beta}}{d\lambda} = 2P^{[\alpha} u^{\beta]},$$

где λ – произвольный параметр вдоль мировой линии. Здесь предлагается эквивалентная формулировка в терминах 4-вектора спина σ

$$(3) \qquad \| u \| \sigma_{\alpha} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^{\beta} S^{\gamma\delta}:$$

$$(4) \qquad m_0 \| u \| \left[\| u \|^4 \frac{Du_{\alpha}}{d\lambda} - \| u \|^2 u_{\beta} \frac{Du^{\beta}}{d\lambda} u_{\alpha} \right] =$$

$$= \| u \| \sigma^{\nu} \left[\sqrt{|g|}\, \| u \|^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{D^2 u^{\beta}}{d\lambda} u^{\gamma} - 3\sqrt{|g|}\, u_{\delta} \frac{Du^{\delta}}{d\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{Du^{\beta}}{d\lambda} u^{\gamma} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{|g|}}{2} \| u \|^4 \epsilon_{\gamma\delta\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} u^{\beta} u^{\mu} \right].$$

Уравнение (4) необходимо дополнить условием $\| u \| u_{\beta} \sigma^{\beta} = 0$ и спиновой частью уравнений Диксона

$$(5) \qquad \| u \|^3 \frac{D\sigma^{\alpha}}{d\lambda} + \| u \| \sigma_{\beta} \frac{Du^{\beta}}{d\lambda} u^{\alpha} = 0.$$

Если мировая линия частицы нулевая геодезическая, в уравнениях (4) и (5) выражение $\| u \| \sigma_{\alpha}$ следует понимать в смысле (3). Если частица лишена массы покоя, в уравнении (4) следует положить $m_0 \| u \| = 0$ [9]. При движении частицы с ненулевой массой покоя в неискривленном пространстве-времени 4-вектор спина остается постоянным и уравнение (5) отпадет.

В настоящем сообщении исследуется вопрос о существовании в псевдоевклидовом пространстве инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона [10] третьего порядка. Локально вариационная задача определяется лагранжевой плотностью $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}')dt$ на пространстве струй второго порядка $J_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$. Пусть p: $T_r\mathbf{R}^n \to J_r(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ – локальное выражение канонической проекции пространства 1^r-скоростей $T_r\mathbf{R}^n = J_r(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)(0)$ на многообразие $C_r(\mathbf{R}^n, 1)$ одномерных контактных элементов в $\mathbf{R}^n$. Отождествляя $\mathbf{R}^n$ с прямым произведением $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, обозначим $x = (t, \mathbf{x})$; $u = (u^0, \mathbf{u}) = \dot{x}$; $\dot{u} = \ddot{x}$; $\ddot{u}$; $\dddot{u}$ канонические координаты на $T_4\mathbf{R}^n$. В пространстве $\mathbf{R}^n$ возникает параметрически-инвариантная вариационная задача с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(x, u, \dot{u}) = u^0 L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} \circ p, \mathbf{v}' \circ p)$, локально определенной на $T_2\mathbf{R}^n$. Обозначим $\mathbf{E}$ и $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, \underline{\mathcal{E}})$ выражения Эйлера–Пуассона, порождаемые соответственно функциями Лагранжа L и $\mathcal{L}$. Тогда $u^0\mathcal{E}_0 + \mathbf{u} \cdot \underline{\mathcal{E}} = 0$ и имеет место соотношение $\underline{\mathcal{E}}(x, u, \dot{u}, \ddot{u}) = u^0\mathbf{E}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} \circ p, \mathbf{v}' \circ p, \mathbf{v}'' \circ p)$. Произвольное выражение $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'')$ тогда и только тогда является выражением Эйлера–Пуассона, если

$$(6) \qquad \mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}'' + (\mathbf{v}' \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}})\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{c},$$

где кососимметрическая матрица **A**, матрица **B** и столбец **c** зависят лишь от переменных t, **x**, **v** и выполняются условия [11]

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&\partial_{v[i} A_{jk]} = 0, \quad 2B_{[ij]} - 3D_{\mathbf{x}} A_{ij} = 0,\\
&2\partial_{v[i} B_{j]k} - 4\,\partial_{x[i} A_{j]k} + \partial_{xk} A_{ij} + 2D_{\mathbf{x}} \partial_{vk} A_{ij} = 0,\\
&\partial_{v(i} c_{j)} - D_{\mathbf{x}} B_{(ij)} = 0,\\
&2\partial_{vk} \partial_{v[i} c_{j]} - 4\partial_{x[i} B_{j]k} + D_{\mathbf{x}}{}^2 \partial_{vk} A_{ij} + 6D_{\mathbf{x}} \partial_{x[i} A_{jk]} = 0,\\
&4\partial_{x[i} c_{j]} - 2D_{\mathbf{x}} \partial_{v[i} c_{j]} - D_{\mathbf{x}}{}^3 A_{ij} = 0.
\end{aligned}
$$

Символами $D_{\mathbf{x}}$ и $D_{\mathbf{v}}$ обозначены усеченные операторы полного дифференцирования, $D_{\mathbf{x}} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$, $D_{\mathbf{v}} = D_{\mathbf{x}} + \mathbf{v}' \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}}$. Морфизм Эйлера [12] E: $J_3(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1}) \to T^*\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^n} T^*\mathbf{R}^{n-1}$, $\mathrm{E}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'') = dt \otimes \mathbf{E}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'')$, является аффинным отображением над $J_2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1})$. Поэтому с ним естественно ассоциируется форма Пфаффа со значениями в векторном пространстве $\mathbf{R}^{n-1\,*}$

$$
(8)\quad \epsilon = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{v}' + \kappa\, dt, \quad \kappa = (\mathbf{v}' \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}})\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{c}.
$$

Форма ϵ и контактная $T\mathbf{R}^{n-1}$-значная форма $\theta = (dx^i - v^i\,dt) \otimes \partial_{x^i} + (dv^i - v'^i\,dt) \otimes \partial_{v^i}$ порождают модуль $\mathfrak{M}(\epsilon, \theta)$ над алгеброй дифференциальных форм на пространстве $J_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ со значениями в векторном пространстве $\mathrm{End}(\mathbf{R}^{n-1\,*} \oplus T\mathbf{R}^{n-1})$. Пусть в $\mathbf{R}^n$ действует псевдогруппа преобразований Γ, порождаемая векторным полем $\mathrm{X} = \tau\partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{x}}$, и $\mathrm{X}_r = \mathrm{X} + \boldsymbol{\xi}^{(1)} \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\xi}^{(2)} \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}'} + \ldots + \boldsymbol{\xi}^{(r)} \cdot \underline{\partial}_{\mathbf{v}^{(r-1)}}$ — продолжение генератора X на пространство $J_r(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$. Инфинитезимальное условие инвариантности уравнений Эйлера—Пуассона относительно псевдогруппы Γ заключается в инвариантности модуля $\mathfrak{M}(\epsilon, \theta)$ под действием векторного поля X_2. Определяющие уравнения имеют вид

$$
(9)\quad \mathrm{X}_1(\mathbf{A}) = \Lambda \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(2)}_{\mathbf{v}'}, \qquad \mathrm{X}_2(\kappa) = \Lambda \cdot \kappa - \mathbf{A} \cdot D_{\mathbf{v}}\, \boldsymbol{\xi}^{(2)} - \kappa D_{\mathbf{x}} \tau.
$$

Матрица Λ служит неопределенным множителем. В дальнейшем инвариантность предполагается относительно псевдоортогональных преобразований.

Пусть функция Лагранжа $\mathcal{L}$ трансляционно-инвариантна. Решая уравнения в частных производных (7), (9), можно доказать следующее.

1. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве существует только однопараметрическое семейство инвариантных уравнений Эйлера—Пуассона третьего порядка

$$
(10)\quad \frac{m}{\|u\|^3}\left[\|u\|^2 \dot{u} - (\dot{u} \cdot u) u\right] - \frac{\ddot{u} \times u}{\|u\|^3} + 3\frac{(\dot{u} \cdot u)}{\|u\|^5} \dot{u} \times u = 0.
$$

Если $m = 0$, уравнение (10) алгебраически эквивалентно уравнению геодезических окружностей.

2. В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве не существует инвариантных уравнений Эйлера—Пуассона третьего порядка. В этом случае можно, однако, найти инвариантное семейство зависящих от 4-векторного параметра $\sigma = (\sigma^0, \underline{\sigma})$ уравнений Эйлера—Пуассона

$$
(11)\quad \frac{m}{\|\sigma\|^3}\left[\frac{\dot{u}}{\|u\|} - \frac{(\dot{u} \cdot u)}{\|u\|^3} u\right] + \frac{*(\ddot{u} \wedge u \wedge \sigma)}{\|\sigma \wedge u\|^3} - 3\, \frac{(\sigma \wedge \dot{u}) \cdot (\sigma \wedge u)}{\|\sigma \wedge u\|^5} * (\dot{u} \wedge u \wedge \sigma) = 0.
$$

Сравнением с (4) можно показать, что уравнение (11) описывает движение свободных частиц с массой покоя $m_0 = m\left[1 - \dfrac{(\sigma \cdot u)^2}{(\sigma \cdot \sigma)(u \cdot u)}\right]^{3/2}$ и постоянным 4-вектором спина σ. Если $m = 0$, уравнение (11) с дополнительным условием $\sigma \cdot u = 0$ описывает движение безмассовых времениподобных частиц с постоянным 4-вектором спина.

3. Если $m = 0$, множество интегральных линий уравнения (11) включает те геодезические окружности, при движении по которым единичный вектор 4-скорости образует произвольный постоянный угол с выделенным направлением σ: $(\sigma \cdot u/\|u\|)^{\cdot} = 0$. Геодезические окружности выделяются из множества интегральных кривых уравнения (11) условиями $m = 0$ и $(\sigma \cdot u)\dot{u} \wedge u = 0$.

4. Уравнение (10) также имеет физический смысл. Оно описывает плоское движение свободной частицы с массой покоя $m\|\sigma\|$ и спином $\underline{\sigma}$, ортогональным к плоскости движения. Такие движения рассматривались в [13].

Привлекая условия (7), можно убедиться, что не существует уравнений Эйлера–Пуассона, эквивалентных уравнению Дирака–Лоренца (2).

Функция Лагранжа для уравнения (10) неинвариантна и имеет следующий общий вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\|u\|}\left[\frac{u_2(\dot{u}_1 u_0 - \dot{u}_0 u_1)}{u_0^2 + u_1^2 u^1} - \frac{u_1(\dot{u}_2 u_0 - \dot{u}_0 u_2)}{u_0^2 + u_2^2 u^2}\right] + (\dot{u} \cdot \partial_u) f + c \cdot u - m\|u\|,$$

где произвольная функция $f(u)$ удовлетворяет условию $u \cdot \partial_u f = 0$. Более общим образом, пусть псевдоевклидово пространство имеет размерность больше двух и сигнатура метрики не равна двум. Тогда в нем не существует инвариантной функции Лагранжа, уравнения Эйлера–Пуассона для которой третьего порядка.

Пусть X – генератор преобразований Лоренца, задаваемый векторными параметрами ω и β, выражение $\mathcal{E}$ соответствует уравнению (11). Тогда $X_3(\mathbf{E}) = \omega \times \mathbf{E} + (\beta \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\beta$. Пусть X – генератор псевдоортогональных преобразований трехмерного пространства, задаваемый векторным параметром w, X_3^T – его продолжение на пространство $T_3\mathbf{R}^3$ и выражение $\mathcal{E}$ соответствует уравнению (10). Тогда $X_3^T(\mathcal{E}) = w \times \mathcal{E}$. Отсюда заключаем, что псевдоортогональные преобразования и преобразования Лоренца не являются обобщенными преобразованиями инвариантности [12]. Тем самым предложенный метод нахождения инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона существенно более общий, чем методы, исходящие из функции Лагранжа.

Мы показали, что уравнение Матиссона и уравнение геодезических окружностей в определенных случаях могут рассматриваться в контексте механики Остроградского и геометрии Кавагучи. Случай двухмерного пространства рассматривался в [14].

Институт прикладных проблем механики и математики Академии наук УССР, Львов

Поступило
13 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wospakrik H.J.* – Phys. Rev. D, 1982, vol. 26, № 2, p. 523–526. 2. *Vanhecke F.J.* – Rev. bras. fis., 1982, vol. 12, № 2, p. 343–360. 3. *Mathisson M.* – Acta phys. polon., 1937, vol. 6, № 3, p. 163–200. 4. *Френкель Я.И.* В кн.: Собрание избранных трудов. М; Л., 1958, т. 2, с. 460–476. 5. *Brachet M.E., Tirapegni E.* – Nuovo Cim., 1978, vol. 47A, № 2, p. 210–230. 6. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с. 7. *Hill E.L.* – Phys. Rev., 1947, vol. 72, № 2, p. 143–149. 8. *Dixon W.G.* – Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1970, vol. 314, p. 499–527. 9. *Bailyn M., Ragusa S.* – Phys. Rev. D, 1977, vol. 15, № 12, p. 3543–3552. 10. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с. 11. *Мацюк Р.Я.* – Матем. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1984, № 20, с. 16–19. 12. *Kolář I.* In: Proc. conf (CSSR–GDR–Pol.) on diff. geom. and its appl., Praha, 1981, p. 117–123. 13. *Пляцко Р.М.* Эффекты эйнштейновой теории тяготения, обусловленные колебаниями и спином пробного тела. Канд. дис. Минск: Ин-т физики АН БССР, 1979. 136 с. 14. *Мацюк Р.Я.* – Матем. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1982, № 16, с. 84–88.