АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сборник научных трудов

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1989

Matsyuk R.Ya. (2-AOSUK-A2). Exterior
differential equations in generalized
mechanics and symmetry properties
(Russian). Methods for studying differential
and integral operators (Russian), 153-160,
217, "Naukova Dumka" Kiev, 1989.
Edited by P.I. Kalenyuk. 219 pp. + CMP,
1991, no. 13, p. 1666
[00].

CMP
1991 no. 13 p. 1721 [58A, 58F, 70G]

УДК 514.763.637:517.421:512.816.7

Р. Я. Мацюк

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
И МАТЕМАТИКИ АН УССР, ЛЬВОВ

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ МЕХАНИКЕ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

В общей постановке вариационная задача r-го порядка для p-мерных вложений в $p+q$-мерное многообразие M формулируется на пространстве контактных элементов C_r^pM. В теории поля более естественно ограничиться открытым подмногообразием $Y_r \equiv \mathrm{J}_rY$ в C_r^pY, состоящим из струй сечений некоторой сюръективной субмерсии $Y_0 \equiv Y \to Z$. В настоящей работе выбран второй подход с последующим применением к локальному представлению $\varphi_C : C_r^pM \Rightarrow \mathrm{J}_r(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \approx \mathrm{J}_r(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ над локальной картой $\varphi : M \Rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Уравнения Эйлера — Лагранжа и их симметрии изучаются с применением свойств полубазисных форм со значениями в векторном расслоении. Обратимся к предварительным определениям и фактам [1, 2].

1. Пусть $E \to B$; $E_1 \to B_1$; $F \to X$; $F_1 \to X_1$ и $E' \to B$ — расслоенные многообразия, $\Gamma(E)$ — множество гладких сечений расслоенного многообразия E, $\mathfrak{F}(B)$ — кольцо гладких функций на многообразии B. Тензорное произведение обратных образов векторных расслоений относительно морфизмов многообразий $f : B \to X$ и $f_1 : B \to X_1$ обозначается $\otimes_B$. Если многообразие B расслоено над некоторым многообразием N, то полубазисные формы на многообразии B со значениями в векторном расслоении F определяются как гладкие сечения расслоения $\bigwedge T^*N \otimes_B F$. Они составляют $\mathfrak{F}(B)$-подмодуль $\mathfrak{F}_N(B, F)$ в градуированном модуле $\mathfrak{F}(B, F) \equiv \Gamma(\bigwedge \mathrm{T}^*B \otimes_B F)$. Всякий гомоморфизм расслоений $h : F \to F_1$ над морфизмом баз $\underline{h} : X \to X_1$, такой, что $f_1 = \underline{h} \circ f$, определяет очевидным образом гомоморфизм модулей $h_* : \mathfrak{F}(B, F) \to \mathfrak{F}(B, F_1)$. В общем случае, естественное спаривание векторных расслоений $E \times \mathrm{Hom}(E, E') \to E'$ определяет внешнее произведение $\bigwedge : \mathfrak{F}(B, E) \times \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \to \mathfrak{F}(B, E')$. Если сечение $\varkappa \in \mathfrak{F}^0(B, E^* \otimes E')$ интерпретировать как B-морфизм $\hat{\varkappa} : E \to E'$, то $\hat{\varkappa}_*\omega = \omega \bigwedge \varkappa$ для $\omega \in \mathfrak{F}(B, E)$.

действие $h^*: \mathfrak{F}(B,\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}(B_1,\mathbb{R})$, $h^*\alpha = (\wedge h)^* \circ \alpha_g$, где α_g - обратный образ α

Расслоение End E есть расслоение на алгебры с композицией эндоморфизмов в качестве умножения. Это послойное умножение задает структуру градуированной некоммутативной алгебры на $\mathfrak{F}(B)$-модуле End E-значных форм, $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E)$. Расслоение E можно рассматривать как расслоение на End E-модули относительно спаривания $E \times \times \operatorname{End} E \to E$. Это спаривание превращает $\mathfrak{F}(B)$-модуль $\mathfrak{F}(B, E)$ в градуированный модуль над алгеброй $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E)$.

Пусть теперь $h: E_1 \to E$-морфизм векторных расслоений над морфизмом баз $g: B_1 \to B$, а $h_0: E_1 \to g^*E$ — соответствующий B_1-морфизм. Сопряженный гомоморфизм дуальных расслоений $h_0^*: (g^*E)^* \to E_1{}^*$ определяет, в силу отождествления $(g^*E)^* \approx g^*E^*$, некоторый g-коморфизм $h^*: g^*E^* \to E_1{}^*$. Если $\omega \in \mathfrak{F}(B, E)$ и $\omega_g \in \Gamma(\bigwedge \mathrm{T}^*B \otimes_{B_1} E)$ — обратный образ сечения ω относительно g, то форма $g^*\omega \in \mathfrak{F}(B_1, E)$ определяется композицией отображений: $g^*\omega = ((\bigwedge \mathrm{T}g)^* \otimes \mathrm{id}) \circ \omega_g$. Если морфизм g продолжается каноническим образом до некоторого g-коморфизма $k: g^*E \to E_1$, для формы $((\bigwedge \mathrm{T}g)^* \otimes k)\circ)\, \omega_g \equiv k_* g^*\omega$ используется то же обозначение $g^*\omega$.

Функтор g^* согласован с тензорным умножением и операцией свертки. Если $\omega = \alpha \otimes \rho \in \mathfrak{F}(B, E) \approx \mathfrak{F}(B, \mathbb{R}) \otimes \Gamma(E)$ и $\Omega = \beta \otimes \otimes \varkappa \in \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \approx \mathfrak{F}(B, \mathbb{R}) \otimes \Gamma(E^* \otimes E')$, то для обратных образов сечений ω, Ω и $\omega \bigwedge \Omega = (\alpha \bigwedge \beta) \otimes \langle \rho, \varkappa \rangle$ справедливо, что $(\omega \bigwedge \Omega)_g = (\alpha_g \bigwedge \beta_g) \otimes \langle \rho_g, \varkappa_g \rangle \in \Gamma(\bigwedge \mathrm{T}^*B \otimes_{B_1} E')$. В композиции с $(\bigwedge \mathrm{T}g)^*$ имеем $g^*(\omega \bigwedge \Omega) = g^*\omega \bigwedge g^*\Omega$.

Один-форму $\vartheta \in \mathfrak{F}^1(B, \mathrm{T}B)$ можно понимать как B-гомоморфизм расслоений $\hat{\vartheta}: \mathrm{T}B \to \mathrm{T}B$, тогда сопряженный гомоморфизм $\hat{\vartheta}^*: \mathrm{T}^*B \to \to \mathrm{T}^*B$ действует на сечениях из $\Gamma(\mathrm{T}^*B) \equiv \mathfrak{F}^1(B, \mathbb{R})$ очевидным образом и распространяется с обозначением $\vartheta \overline{\bigwedge}$ как дифференцирование степени ноль, тривиальное на кольце функций, на всю алгебру скалярных форм $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$. В отождествлении $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E) \approx \mathfrak{F}(B, \mathbb{R}) \otimes_{\mathfrak{F}(B)} \Gamma(\operatorname{End} E)$ можно определить $\vartheta \overline{\bigwedge} (\alpha \otimes \varkappa) = (\vartheta \overline{\bigwedge} \alpha) \otimes \mathrm{id}(\varkappa)$. Пусть $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{J}(B) \equiv \mathfrak{J}(\vartheta) = \sum_{0<d} \mathfrak{J}^{(d)} = \vartheta \overline{\bigwedge} \mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$ (соответственно $\mathfrak{J}(B, \operatorname{End} E) = \vartheta \overline{\bigwedge} \mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E)$) — идеал (соответственно $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$-подмодуль) в алгебре $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$ (соответственно в $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$-модуле $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E)$). Обозначим $\mathfrak{J}(B, E)$ подмодуль $\mathfrak{F}(B, E) \bigwedge \mathfrak{J}$ в модуле $\mathfrak{F}(B, E)$ над алгеброй $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$. Ясно, что $\mathfrak{J}(B, E)$ — также подмодуль над алгеброй $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} E)$ и $\mathfrak{J}(B, E) = \mathfrak{F}(B, E) \bigwedge \mathfrak{J}(B, \operatorname{End} E)$. Действительно, $\mathfrak{J}(B, E)$ порождается над $\mathfrak{F}(B, \mathbb{R})$ $\mathfrak{F}^0(B, \operatorname{End} E)$-подмодулем один-форм $\mathfrak{P}(B, E) = \vartheta \overline{\bigwedge} \mathfrak{F}^1(B, E) = \mathfrak{F}^0(B, E) \bigwedge \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}(B) \equiv \mathfrak{J}^{(1)} = \vartheta \overline{\bigwedge} \mathfrak{F}^1(B, \mathbb{R})$ является $\mathfrak{F}(B)$-подмодулем, т. е. обычной системой Пфаффа.

Определение. Внешней дифференциальной системой $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}(F)$ называется $\mathfrak{F}(B, \operatorname{End} F)$-подмодуль в модуле $\mathfrak{F}(B, F)$. Системой Пфаффа называется внешняя дифференциальная система, порожденная один-формами. Пусть задано многообразие Z. Решением системы $\mathfrak{S}$ называется росток погружения $\sigma: Z \to B$, такой, что $\sigma^*\mathfrak{S} = 0$. Две системы (заданные на разных многообразиях) называются эквивалентными, если совпадают (изоморфны) множества их решений.

- $\mathrm{T}B_1$, получим

это локальные изоморфизмы. Глобально изоморфизмы имеют место на уровне пучков

Пусть на многообразии B заданы внешние дифференциальные системы $\mathfrak{S}$ со значениями в расслоении E и $\mathfrak{S}'$ со значениями в расслоении E' и пусть $s\mathfrak{S}$ обозначает множество решений системы $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \supset \mathfrak{S}'$, то $s\mathfrak{S}' \supset s\mathfrak{S}$.

Определение. Внешние дифференциальные системы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ алгебраически эквивалентны, если одновременно $\mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \supset \mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}' \wedge \mathfrak{F}(B, E'^* \otimes E) \supset \mathfrak{S}$.

Лемма. Алгебраически эквивалентные системы Пфаффа эквивалентны.

Это следует из свойства полноты систем Пфаффа.

Лемма. Системы $\mathfrak{F}(B, E)$ и $\mathfrak{F}(B, E')$ всегда эквивалентны.

Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ обозначает образ системы $\mathfrak{S}$ при проекции $j : \mathfrak{F}(B, E) \to \mathfrak{F}(B, E)/\mathfrak{F}(B, E)$. Поскольку $\mathfrak{F}(B, E) \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \subset \mathfrak{F}(B, E')$, определено действие элементов из $\mathfrak{F}(B, E^* \otimes E')$ на фактормодуле, причем, если $\mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \supset \mathfrak{S}'$, то и $\tilde{\mathfrak{S}} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E') \supset \tilde{\mathfrak{S}}'$.

Определение. Решением системы $(\mathfrak{S}, \vartheta)$ называется росток погружения $\sigma : Z \to B$, такой, что $\sigma^* j^{-1}(\tilde{\mathfrak{S}}) = 0$.

Пусть на многообразии B_1 выбрана форма $\vartheta_1 \in \mathfrak{F}(B_1, TB_1)$ такая, что $g^*\vartheta = \vartheta_1 \overline{\wedge} \mu \in \mathfrak{P}(B_1, g^*TB)$. $\mu\in\mathfrak{F}(B_1, TB)$ Учитывая определения отображений g^*, $\vartheta_1\overline{\wedge}$ и отождествляя формы ϑ, ϑ_1 и μ с соответствующими гомоморфизмами $\hat{\vartheta}$, $\hat{\vartheta}_1$ и $\hat{\mu} : TB_1 \to g^*TB$, имеем $\hat{\vartheta}_g \circ (Tg)_0 = \hat{\mu} \circ \hat{\vartheta}_1$, где $\hat{\vartheta}_g$ — обратный образ гомоморфизма $\hat{\vartheta}$ относительно отображения g Для сопряженных гомоморфизмов $(Tg)^* \circ \hat{\vartheta}_g{}^* = \hat{\vartheta}_1{}^* \circ \hat{\mu}^*$.

По определению действия $\hat{\mu}^*$ на один-форму $\omega \in \mathfrak{F}^1(B, \mathbb{R})$, $g^*(\vartheta \overline{\wedge} \omega) = (Tg)^* \circ \hat{\vartheta}_g{}^* \circ \omega_g = \hat{\vartheta}_1{}^* \circ \hat{\mu}^* \circ \omega_g = \vartheta_1 \overline{\wedge} \hat{\mu}^*\omega \in \mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P}(B_1)$. Следовательно, $g^*\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_1$, откуда $g^*\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$, $g^*\mathfrak{F}(B, E) = g^*\mathfrak{F}(B, E) \wedge g^*\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}(B_1, g^*E) \wedge \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}(B_1, g^*E)$, и определено действие g^* на фактормодуле $\mathfrak{F}(B, E)/\mathfrak{F}(B, E)$.

Пусть $w : B \to W$ — морфизм многообразий и w_t — его деформация, тогда $\dot{w}_t(0) : B \to TW$ — поднятие морфизма w. Если многообразие W расслоено над B и все w_t — сечения, то $\dot{w}_t(0)$ лежит в расслоении вертикальных касательных векторов $VW \subset TW$. Пусть ξ и $\bar{\eta}$ — векторные поля на многообразии B и W соответственно. Производная Ли морфизма w относительно полей $\xi, \bar{\eta}$ определяется выражением [4] $\mathbf{L}_{\xi,\bar{\eta}} w = (Tw) \circ \xi - \eta \circ w$. Если w — сечение и поле η проектируется в поле ξ, то $\mathbf{L}_{\xi,\bar{\eta}} w$ лежит в VW. Пусть при этом $\exp_0 t\bar{\eta}$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов над B, соответствующих $\exp t\bar{\eta}$, и $w_t = \exp_0(-t\bar{\eta}) \circ w_{\exp t\xi} = \exp(-t\bar{\eta}) \circ w \circ \exp t\xi$. Имеем $\dot{w}_t(0) = -(\exp t\bar{\eta})^{\cdot} \circ w + (Tw) \circ (\exp t\xi)^{\cdot} = \mathbf{L}_{\xi,\bar{\eta}} w$. Если W—векторное расслоение, то $VW \approx W \times {}_B W$, первая компонента $\dot{w}_t(0)$ совпадает с первоначальным сечением w, а вторая отождествляется с $\mathbf{L}_{\xi,\bar{\eta}} w$. Пусть, в частности, $W = \wedge T^*B \otimes E$ и поле $\bar{\eta}$ индуцируется стандартным лифтом поля ξ и некоторым полем η на E, проектируемым в поле ξ. Обозначим $L_{\xi,\eta} \equiv L_{\xi,\bar{\eta}}$.

Определение. Диффеоморфизм $g: B \to B$ называется (алгебраической) симметрией системы $\mathfrak{S}(E)$, если системы $g^*\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}$ (алгебраически) эквивалентны. Поле ξ на многообразии B называется (алгебраической) инфинитезимальной симметрией системы $\mathfrak{S}$, если $\exp t\xi$ — (алгебраическая) симметрия при каждом t. Это значит, что $(\exp t\xi)^* \mathfrak{S} \subset \subset \mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes \exp t\xi^* E)$. В частности, каким бы ни было поле η, $\in \Gamma(TE)$, проектируемое на поле ξ, $(\exp - t\eta)_{0*} \exp t\xi^* \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes \otimes \exp t\xi^* E) \wedge \mathfrak{F}^0(B, \exp t\xi^* E^* \otimes E) \subset \mathfrak{S} \wedge \mathfrak{F}(B, E^* \otimes E) = \mathfrak{S}$. В сокращенных обозначениях, подразумевая поле η, имеем $L_\xi \mathfrak{S} = = d/dt\,(\exp t\xi)^* \mathfrak{S}(0) \subset \mathfrak{S}$. Если расслоение E — тривиально, то можно положить $\eta = (\xi, 0)$. обозначая $L_{\xi,0} = L_{\xi,(\xi,0)}$.

Определение. Диффеоморфизм $g: \tilde{B} \to \tilde{B}$ называется (алгебраической) симметрией системы $(\mathfrak{S}, \vartheta)$, если $g^*\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$ и системы $g^*\tilde{\mathfrak{S}}$ и $\tilde{\mathfrak{S}}$ (алгебраически) эквивалентны.

(Алгебраическая) симметрия системы $(\mathfrak{S}, \vartheta)$ является (алгебраической) симметрией системы $\mathfrak{S} + \mathfrak{J}(B, E)$ и наоборот. В этом случае $L_\xi \tilde{\mathfrak{J}} \subset \mathfrak{J}$ и $L_{\xi,\eta} \tilde{\mathfrak{S}} \subset \tilde{\mathfrak{S}}$, т. е.

$$L_{\xi,\eta} \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S} + \mathfrak{J}(B, E). \tag{1}$$

2. На многообразии струй сечений Y_{s+1} существует стандартная контактная форма $\vartheta_s \in \mathfrak{F}_{Y_s}(Y_{s+1}, V_s)$ со значениями в расслоении V_s вертикальных касательных векторов к расслоенному многообразию $\pi^s = \pi^s_v \circ \pi^v : Y_s \to Z$, $v < s$, такая, что $\mathfrak{P}_s = \vartheta_s \overline{\wedge} \mathfrak{F}^1_{Y_s}(Y_{s+1}, \mathbb{R})$ — ко-распределение Картана. Положим $\mathfrak{J}_v(U) = \mathfrak{J}(\pi^s_v|_U^* \vartheta_v)$, $U \subset Y_s$ и пусть ψ_J стандартное поднятие локальной расслоенной карты ψ на многообразии Y, $\psi_J : Y_s \to J(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^k)$. Лагранжиан — это элемент $\tilde{\lambda}$ из факторпучка, порожденного локальными фактор-модулями $\mathfrak{F}^p_Y(U, \mathbb{R})/\mathfrak{J}^{(p)}_0(U)$, который для краткости обозначим $\mathcal{F}^p_Y(Y_r, \mathbb{R})/\mathfrak{J}^{(p)}_0(Y_r)$. В этом случае всегда можно хотя бы локально найти представитель $\lambda \in \mathcal{F}^p_Z(Y_r, \mathbb{R})$. Выражение Эйлера — Лагранжа, соответствующие лагранжевой плотности $\psi_J^{-1*}\lambda \in \mathcal{F}^p_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k}(J_r(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^k), \mathbb{R})$, можно интерпретировать как компоненты локального выражения некоторой p-формы $\varepsilon \in \mathcal{F}^p_Z(Y_{2r}, V^*_0)$, соответствующей лагранжиану λ [2, 3]. Эта форма совершенно эквивалентна известному морфизму Эйлера, определяется внутренним образом всегда и формально — в хорошо известных случаях [2]. Симметрии уравнений Эйлера — Лагранжа — это симметрии внешней дифференциальной системы $(\mathfrak{S}_\varepsilon, \vartheta_{2r-1})$, где модуль $\mathfrak{S}_\varepsilon$ порожден формой ε.

Вариационная задача в параметрической форме — это вариационная задача на многообразии $J_r(Z, M) \approx Y_r$, где $Y = Z \times M$. Мы будем рассматривать только параметрически-инвариантные и, следовательно, автономные уравнения Эйлера — Лагранжа, соответствующие заданию функции Лагранжа на многообразии скоростей r-го порядка $T^p_r M = J_r(\mathbb{R}^p, M)(0)$. Такие уравнения генерируются с помощью проекции $p: T^p_s M \setminus 0 \to C^p_s M$ вариационными задачами, формулируемыми на $C^p_s M$.

Пусть θ_s — контактная форма на $J_s(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Обратный образ относительно стандартной карты $\varphi_C : C_r^p M \to J_r(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ко-распределения Картана $\theta_{s-1} \overline{\wedge} \mathfrak{F}^1_{J_{s-1}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)}(J_s(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \mathbb{R})$ не зависит от карты и определяет, таким образом, ко-распределение Картана $\mathfrak{P}^C_{s-1}$ на многообразии $C_s^p M$, а следовательно, также и идеал $\mathfrak{J}^C_{s-1} = \mathfrak{P}^C_{s-1} \wedge \wedge\, \mathfrak{F}(C_r^p M, \mathbb{R})$. Лагранжиан на $C_r^p M$ — это элемент $\tilde{\Lambda}$ из $\mathcal{F}^p_M\,(C_r^p M, \mathbb{R})/\mathcal{J}_0^{(p)}(C_r^p M)$ Для каждой локальной карты φ_C можно найти единственный представитель $\Lambda' \in \tilde{\Lambda}$ такой, что $\varphi_C^{-1*}\Lambda' \in \in \mathcal{F}^p_{\mathbb{R}^p}\,(J_r(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \mathbb{R})$ и, следовательно, такую функцию $L \in \mathcal{F}(J_r(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q))$, что $\Lambda' = \varphi_C^*(L d^p t)$, где $d^p t$ — форма объема на $\mathbb{R}^p$.

Пусть здесь и далее $Z = \mathbb{R}^p$ — второй экземпляр пространства $\mathbb{R}^p$, $\psi = (\mathrm{id}, \varphi)$, $\mathrm{pr} : J_s \in (Z, M) \to T_s^p M$ — стандартная проекция на второй сомножитель и $\wp = \mathrm{p} \circ \mathrm{pr}$. Как можно показать, $(\varphi_C \circ \wp \circ \psi_J^{-1})^* \theta_0 = = (\psi_J^{-1*}\vartheta_0) \overline{\wedge} \left((dx^\iota - (\varphi_C \circ \wp \circ \psi_J^{-1})^\iota_u\, dt^u) \otimes \frac{\partial}{\partial x^\iota} \right)$, где $\varphi = (t^u, x^\iota)$, так что $\wp^* \mathfrak{P}_0^C \subset \mathfrak{P}_0$ и определено действие

$$\wp^* : \mathcal{F}_M(C_s^p M, \mathbb{R})/\mathcal{J}_0(C_s^p M) \to \mathcal{F}_Y(J_s(Z, M), \mathbb{R})/\mathcal{J}_0(Y_s).$$

В классе $\wp^* \tilde{\Lambda} = \widetilde{\wp^* \Lambda}$ существует единственный представитель $\lambda = = \mathcal{L} d^p z \in \mathcal{F}^p_Z\,(J_r(Z, M), \mathbb{R})$, причем соответствующий функционал действия инвариантен относительно преобразований параметра z, в частности, функция $\mathcal{L}$ не зависит от переменной z, т. е. она автономна.

Вариационная задача в автономной форме определяется некоторой функцией Лагранжа на многообразии $T_r^p M$. Отображение pr^* устанавливает взаимно-однозначное соответствие между такими задачами и задачами $\mathcal{L} d^p z$ на $J_r(Z, M)$ с автономной функцией Лагранжа $\mathcal{L} \in \in \mathfrak{F}(J_r(Z, M))$.

Расслоение V_s вертикальных касательных векторов к многообразию $Y_s = J_s(Z, M)$ отождествляется с обратным образом $\mathrm{pr}^*\, T(T_s^p M)$ касательного к $T_s^p M$ расслоения. Контактна форма ϑ_{s-1} принимает значение в $T(T^p_{s-1}M)$, $\vartheta_{s-1} \in \mathfrak{F}(Z \times T_s^p M,\ T(T_s^p M))$. Форма ε, соответствующая лагранжиану $\mathcal{L} d^p z$, принимает значения в $V_0^* \approx T^* M$, $\varepsilon \in \mathfrak{F}^p_Z(Z \times T^p_{2r} M,\ T^* M)$. Если $\mathcal{L}$ автономна, то $\mathcal{L} \in \mathfrak{F}(T_r^p M)$. Существует единственная $\varepsilon_0 \in \mathfrak{F}^0(T^p_{2r} M,\ T^* M)$ такая, что $\varepsilon = (\varepsilon_0 \circ \mathrm{pr})\, d^p z$.

Определение. Решением системы $\mathfrak{S}_{\varepsilon_0}$, порожденной формой ε_0, называется стандартное поднятие $\partial_{2r}\sigma : Z \to T^p_{2r} M$ ростка погружения $\sigma : Z \to M$, такого, что $\partial_{2r}\sigma^* \varepsilon_0 = 0$.

Пусть $\varphi_T : T_s^p M \to J_s(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p+q})(0)$ — стандартная локальная карта, согласованная с картами φ и φ_C, а форма ϵ соответствует лагранжиану $L d^p t$. Тогда ϵ принимает значения в векторном пространстве $\mathbb{R}^{q*}$, $\epsilon \in \mathfrak{F}^p_{\mathbb{R}^p}(J_{2r}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \mathbb{R}^{q*})$. На многообразии $T_1^p M$ стандартные локальные координаты (x^α, x^α_n) индуцируются координатами

$(x^\alpha) = (t^u,\ x^i) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ в карте φ. Если $p = 1$, обозначим $u^\alpha = \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dz}$.

Предложение [2]:

1) системы $\mathfrak{S}_{\varepsilon_0}$ и $(\mathfrak{S}_\epsilon, \theta)$ эквивалентны;

2) если $p = 1$, тогда инфинитезимальные точечные симметрии системы $\mathfrak{S}_{\varepsilon_0}$ совпадают с инфинитезимальными точечными алгебраическими симметриями системы $(\mathfrak{S}_\epsilon, \theta)$;

3) $\varphi_T^{-1*}\mathcal{L} = \det(t_n^u)\ (\varphi_C \circ p \circ \varphi_T^{-1})^*\ L$;

4) если $p = 1$, то лагранжиану $(\varphi_T^{-1*}\mathcal{L})\ dz$ соответствует $\mathbb{R}^{q+1*}$-значная форма $(\varphi_T^{-1*}\varepsilon_0)\ dz$,

$$\varphi_T^{-1*}\varepsilon_0 = (-\dot{x}^i \cdot \epsilon_i \circ \varphi_C \circ p \circ \varphi_T^{-1},\ \dot{t} \cdot \epsilon_i \circ \varphi_C \circ p \circ \varphi_T^{-1}).$$

3. Полезно объединять требования инвариантности и лагранжевости уравнений движения, скажем, материальной точки в однородных пространствах. В следующем примере такой подход позволяет конструктивно в явном виде описать все уравнения, удовлетворяющие налагаемым требованиям.

Следует найти систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, управляющую движением в трехмерном (псевдо) евклидовом пространстве M по экстремалям некоторой локальной параметрически-инвариантной функции действия. Множество экстремалей должно быть инвариантно относительно (псевдо)евклидовых преобразований.

Сопоставим искомым уравнениям $\varepsilon_\alpha = 0$ форму $\varepsilon = \varepsilon_0 dz = \varepsilon_\alpha dz \otimes \otimes dx^\alpha$, которой должен локально соответствовать лагранжиан $\mathcal{L}dz$. Согласно пунктов 1) и 2) предложения можно рассматривать некоторую форму $\epsilon = \epsilon_i dt \otimes dx^i$ на пространстве $J_3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, для которой должен локально существовать лагранжиан Ldt. Требование лагранжевости определяет [2] вид формы,

$$\epsilon_i = A_{ij}v''^j + v'^l\partial_{v^l}A_{ij}v'^j + B_{ij}v'^j + c_i,$$

где $v^j = dx^j/dt$ и коэффициенты A_{ij}, B_{ij}, c_i, как функции только переменных t, x^i, v^i, удовлетворяют определенным уравнениям в частных производных, «условиям лагранжевости» [2].

Пусть

$$\underset{\sim}{\epsilon}_i = A_{ij}dv'^j + \kappa_i dt,\ \kappa_i = v'^l\partial_{v^l}A_{ij}v'^j + B_{ij}v'^j + c_i,\ \underset{\sim}{\epsilon} = \underset{\sim}{\epsilon}_i \otimes dx^i.$$

Системы $(\mathfrak{S}_\epsilon, \theta_2)$ и $(\mathfrak{S}_{\underset{\sim}{\epsilon}}, \theta_1)$ эквивалентны:

$$\underset{\sim}{\epsilon} - \epsilon = \theta_2 \overline{\wedge} (A_{ij}dv'^j \otimes dx^i),$$

$$\theta_2 = (dx^j - v^j dt) \otimes \partial_{x^j} + (dv^j - v'^j dt) \otimes \partial_{v^j} + (dv'^j - v''^j dt) \otimes \partial_{v'^j}.$$

Пусть $\xi_C = \xi + \xi_{(1)}{}^i\partial_{v^i} + \xi_{(2)}{}^i\partial_{v'^i} = \xi_1 + \xi_{(2)}{}^i\partial_{v'^i}$ — второе продолжение на пространство $J_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ генератора ξ псевдоевклидовых преобразований пространства M, $\xi = \tau\partial_t + \xi^i\partial_{x^i}$, и $D_2 = D_1 + v'^i\partial_{v_i} = \partial_t +$

$+ v^i\partial_{x^i} + v'^i\partial_{v^i}$. Условия инвариантности системы ($\mathfrak{S}_\epsilon$, θ_1) записываются с помощью неопределенных множителей $\Phi \in \mathfrak{F}^0(\mathrm{J}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q), \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^{q*})$ и $\Xi \in \mathfrak{F}^1(\mathrm{J}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q), \mathbb{R}^{q*})$, присутствующих неявно в (1),

$$\mathbf{L}_{\xi_C, 0}\, \epsilon = \epsilon \wedge \Phi + \theta_1 \wedge \Xi.$$

Приравнивая коэффициенты при дифференциалах координат dv'^i, dv^i, dx^i, dt, получаем следующую «определяющую» систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{L}_{\xi_1} A_{ij} = \Phi_i{}^l A_{lj} - A_{il}\partial_{v'^j}\xi_{(2)}{}^l; \quad \mathbf{L}_{\xi_C}\kappa_i = \Phi_i{}^l \kappa_l - A_{ij}\mathrm{D}_2\xi_{(2)}{}^j - \kappa_i \mathrm{D}_1\tau. \quad (2)$$

Матрица A_{ij} по условиям лагранжевости должна быть кососимметрической и в нашем примере, следовательно, невырожденной. Это позволяет избавиться также и от неопределенного множителя Φ. В работе [2] удалось полностью разрешить систему уравнений (2), дополненную условиями лагранжевости, и получить семейство уравнений Эйлера — Лагранжа, удовлетворяющих всем наложенным условиям,

$$\epsilon_i = \frac{e_{ij}v''^j}{(1 + v_jv^j)^{2/3}} - 3\frac{v_jv'^j}{(1 + v_jv^j)^{5/2}} e_{ij}v'^j +$$

$$+ \frac{m}{(1 + v_jv^j)^{3/2}}\left((1 + v_jv^j)\, v'_i - v'_jv^jv_i\right) = 0,$$

а также предъявить общий вид функции Лагранжа $L = L(t, x^i, v^i, v'^i) =$
$$= \frac{1}{2(1 + v_jv^j)^{1/2}}\left(\frac{v'_1v_2}{1 + v_1v^1} - \frac{v'_2v_1}{1 + v_2v^2}\right) - m(1 + v_jv^j)^{1/2} + v'^j\partial_{v^j}g + a_jv^j,$$
где e_{ij} — ковариантный символ Леви — Чевиты; $e_{12} = 1$; g — произвольная функция переменных v^i; m и a_i —произвольные постоянные. Согласно пп. 3) и 4) предложения можно сразу записать параметрически-однородную форму искомого уравнения и соответствующей функции Лагранжа

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_\alpha) = \frac{\ddot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} - 3\frac{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^5} + m\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\,\dot{\mathbf{u}} - (\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} = 0;$$

$$\mathscr{L} = u^0(\varphi_C \cdot \mathrm{p})^* L = u^0 L\left(t,\ x^i,\ \frac{u^i}{u_0},\ \frac{\dot u^i u^0 - u^i\dot u^0}{(u^0)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2|\mathbf{u}|}\left(\frac{u_2(\dot u_1u_0 - \dot u_0u_1)}{u_0u^0 + u_1u^1} - \frac{u_1(\dot u_2u_0 - \dot u_0u_2)}{u_0u^0 + u_2u^2}\right) - m|\mathbf{u}| + \dot u^\alpha\partial_{u^\alpha}f + a^\alpha u_\alpha,$$

где произвольная функция f переменных u^α должна удовлетворять условию $u^\alpha\partial_{u^\alpha}f = 0$.

Следует обратить внимание на высокую степень общности изложенного метода: хотя в нашем примере не существует лагранжиана, инвариантного хотя бы в обобщенном смысле (т. е. с точностью до полной производной), множество экстремалей инвариантно. Этот факт можно усмотреть, вычислив действие производной Ли $\mathbf{L}_{\xi_T}$ на выражения ε_α, где ξ_T — продолжение на пространство $\mathrm{T}^1_3 M$ генератора ξ (псевдо) евклидовых преобразований пространства M, параметризованных векторным параметром **w**:

$$\xi_{\text{т}} = \left[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right] + \left[\mathbf{w}, \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right] + \left[\mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right] + \left[\mathbf{w}, \ddot{\mathbf{u}}, \frac{\partial}{\partial u}\right].$$

Имеем $\mathbf{L}_{\xi_{\text{т}}} \varepsilon = \mathbf{w} \times \varepsilon$.

Полученные уравнения при $m = 0$ решениями имеют геодезические окружности в M, т. е. плоские окружности в евклидовой и плоские равносторонние гиперболы в псевдоевклидовой метрике. В последнем случае, следовательно, они описывают равноускоренное движение в модельной трехмерной специальной теории относительности. Обобщения (весьма непрямые) на четырехмерное пространство содержатся в [2].

1. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов — М. : Мир, 1975.— 224 с.
2. *Мацюк Р. Я.* Пуанкаре-инвариантные уравнения движения в лагранжевой механике с высшими производными : Автореф. дис. ... к-та физ.-мат. наук.— Львов, 1985.— 18 с
3. *Ferraris M , Francaviglia M* Energy-momentum tensors and stress tensors in geometric field theories // J. Math. Phys.— 1985.— **26**, N 6.— С. 1243—1252.
4. *Kolař I.* Lie derivatives and higher order Lagrangians // Proc. conf. (CSSR — GDR — Pol.) diff. geom. and its appl.— Praha : Univ. Karlova, 1981.— С. 117—123.

Получено 06.01.87.