ISSN 1810-3022

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ
І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ і МАТЕМАТИКИ

Науковий збірник

Випуск 7

2009

УДК [531.12/.13.01:530.12]:[531.314.2:512.816.7]:517.972.7

Р. Я. Мацюк

НЕЗМІННІ ВАРІЯЦІЙНІ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ В СПЕЦІЯЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТИ НА ПЛОЩИНІ

Послідовно застосовуємо деякі нутрішні засоби диференційної геометрії та формальної теорії диференційних рівнянь, фрагментарно описані в попередніх працях, до конкретного завдання про знаходження Пуанкаре-незмінного варіяційного рівняння руху третього порядку у тривимірному просторі-часі. Виходячи виключно з міркувань варіяційности і симетрії, отримуємо вираз для кількости руху релятивіської частки з кривиною, як нуль вимірного аналога цупкої (rigid) струни [34].

Вступ. Пуанкаре-незмінне варіяційне рівняння руху третього порядку у тривимірному просторі-часі, знайдене в попередніх працях (гляди, наприклад, поклики у письмі [22]), служить хорошим прикладом розв'язаного до кінця так званого *незмінного оберненого завдання* варіяційного числення (the invariant inverse problem in the calculus of variations). Мета цієї статті – подати самодостатній огляд згаданого оберненого завдання в межах тривимірної (лже)евклідівської геометрії з повним застосуванням методів, частково розвинених у працях [24–27].

Впродовж останніх десятиріч предмет механіки Остроградського постійно ставав об'єктом досліджень різних авторів з точки зору цілісного (global) аналізу, в тім числі з використанням певних рис нутрішньої диференційної геометрії (гляди монографії [19, 15, 36], яким передували і після яких продовжують з'являтися численні статті як оглядового, так і ориґінального характеру). Цікаво, що після новаторських праць Матісона [21], Бопа [14], Вайсенгофа з Рабе [40] і Генля [16] впровадження механіки Остроградського до фізичних моделей не припинялись. Більшість застосувань відносилися до моделей буцім-клясичних часток з нутрішніми ступенями свободи [38, 35, 34, 32, 11, 3, 12, 8, 13], або до моделей, в котрих поняття приспішення частки розглядається в контексті загальних диференційно-геометричних структур на розширеному конфіґураційному просторі частки [37]. Цікавий приклад того, як похідні вищого порядку можуть з'явитися в рівняннях руху пробних часток, можна збудувати, виходячи зі системи рівнянь Матісона–Папапетру [33], які пов'язують динаміку швидкости частки $u^\alpha = \dfrac{Dx^\alpha}{d\zeta}$ з динамікою скісного тензора спіну $S^{\alpha\beta}$

$$\frac{D}{d\zeta}\left(m_0 \frac{u^\alpha}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{u_\gamma}{\|\mathbf{u}\|^2} \frac{D}{d\zeta} S^{\alpha\gamma} \right) = \mathcal{F}^\alpha \tag{1}$$

$$\frac{D}{d\zeta} S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \left(u^\beta u_\gamma \frac{D}{d\zeta} S^{\alpha\gamma} - u^\alpha u_\gamma \frac{D}{d\zeta} S^{\beta\gamma} \right), \tag{2}$$

разом з додатковою умовою

$$u_\gamma S^{\alpha\gamma} = 0. \tag{3}$$

Тут одразу бачимо, що другий доданок в (1) може породити похідні третього порядку від просторово-часових координат x^α, як тільки наважимось замінити $u_\gamma \dfrac{DS^{\alpha\gamma}}{d\zeta}$ на $-S^{\alpha\gamma} \dfrac{Du_\gamma}{d\zeta}$ з огляду на (3). Ця заміна, по суті, означає використання упохідненого рівняння (3). Система так одержаних рівнянь третього порядку не міститиме, однак, додаткових розв'язків порівняно зі системою (1)–(3), поки не забуватимемо долучати до неї також і вихідну в'язь (3). Можна переконатися, що в термінах чотири-вектора спіну

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2\|u\|}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta S^{\gamma\delta} \tag{4}$$

система рівнянь Матісона–Папапетру (1), (2) вкупі з додатковою умовою Матісона–Пірані (3) рівнозначна з такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{D^2u^\beta}{d\zeta^2}u^\gamma\sigma^\delta - 3\frac{u_\nu}{\|\mathbf{u}\|^2}\frac{Du^\nu}{d\zeta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{Du^\beta}{d\zeta}u^\gamma\sigma^\delta + \\
&\qquad + \frac{m_0}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{Du^\nu}{d\zeta}u_\nu u_\alpha - \|\mathbf{u}\|^2\frac{Du_\alpha}{d\zeta}\right] = \mathcal{F}_\alpha, \\
&\|\mathbf{u}\|^2\frac{D\sigma_\alpha}{d\zeta} + \frac{Du^\nu}{d\zeta}\sigma_\nu u_\alpha = 0, \\
&\sigma^\nu u_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Чотири-вектор спіну σ набирає сталого значення у всіх своїх компонентах, якщо тільки сила $\mathcal{F}_\alpha$ щезає. Так є, коли відсутня ґравітація. Рівняння (5) допускає розв'язки, що описують рух у двовимірному просторі, коли $u_3 = \dot{u}_3 = \ddot{u}_3 = 0$, і в цьому випадку, а ще й за відсутности ґравітації, воно набирає вигляду

$$\eta_3\sigma_3\left[\frac{\ddot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} - 3\frac{\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^5}(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})\right] + \frac{m_0}{\|\mathbf{u}\|^3}\left[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} - (\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}\right] = 0, \tag{6}$$

де ми поклали $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\eta_i = \pm 1$, залежно від сиґнатури простору, і, як завжди, вирази, які містять радикали, розглядають у тих куснях простору, де підкореневі вирази додатні, з тим, що в решті простору поза ізотропним конусом усі формули можна очевидним способом змінити. В основному для нас випадку релятивіської механіки всі формули справедливі в наведеному вигляді для просторово-подібної динаміки.

Загальновідомо, що релятивіський рух примітивної частки в ґравітаційному полі можна описати, послужившись поняттям геодезійної світової нитi (т. зв. „непараметризованої світової лінії") в просторі-часі. Саме тому, що не такі аж примітивні частки підлягають рівнянням руху з вищими похідними, дослідження відповідних геометрій виглядає вартісним і з цієї точки зору теж. Але ж так само, як (лже)ріманівська геометрія виростає з природного цілісного виказу дії (global action) групи Лоренца, деяка иньша, складніша від ріманівської, геометрія повинна виростати, на початках, з певних симетрійних міркувань цілісного характеру. Покажемо, як певні механізми нутрішнього аналізу на многовидах допомагають у розв'язанні незмінних обернених завдань варіяційного числення. В спеціяльному випадку тривимірного простору-часу дотримуватимемось певних приписів для одержання Пуанкаре-незмінних варіяційних рівнянь третього порядку аж до остаточного висліду, який полягатиме в явному записі єдиного можливого такого рівняння, в якому шляхом зіставлення з (6) впізнаємо рівняння, що описує рух вільної релятивіської дзиґи за відсутности ґравітації, коли тензор кривини $R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma} = 0$. Цей випадок просторово-двовимірного руху наділений зовсім реальним фізичним змістом (гляди [9]). Про дещо відмінний від описаного вище шлях проникнення третьої похідної до рівнянь Матісона можна довідатися з письма [31].

Однорідна форма і ві́дмірна байдужість. Існують два різні формальні підходи до опису середовища, в якому ставимо завдання варіяційного числення, взагалі кажучи, з p-кратним інтеґралом, залежно від того, чи теорія передбачає повну і довільну переміну координат, як, наприклад, у релятивіській механіці, а чи вимагає дотримання засади сеґреґації на залежні та незалежні змінні, як у математичній теорії класичного поля. Зіставлення обох підходів добре викладене у монографії [2]. У першому, т. зв. „проєктивному" формалізмі дія розвивається в просторі елементів торкання (contact elements) r-го порядку $C^r(Y,p)$, надбудованому над простором Y геть усіх змінних величин. У другому випадку ареною виступає простір $J^r(Y)$ струменів r-го порядку від перекроїв деякої субмерсії $Y \to Z$, де Z – простір незалежних змінних. Са́ме цей останній підхід прийнятий у працях більшости авторів таких, як Ґольдшмідт зі Стернберґом, або Коларж. Прихильник першого підходу Дедекер.

З технічної точки зору варіяційне завдання може ставитись як в „автономному“, так і в „неавтономному“ вигляді, залежно від того, чи зручніше працювати з функціями, а чи з їх графами. У першому випадку дія розгортатиметься у запровадженому Ересманом просторі швидкостей r-го порядку $T^r(M)$ над простором залежних змінних M, у другому випадку всі геометричні побудови відбуватимуться у просторі струменів r-го порядку $J^r(\mathbb{R}^p, M)$, надбудованому над прямим добутком $\mathbb{R}^p \times M$ просторів залежних і незалежних змінних відповідно. У варіяційному численні зі звичайним інтеґралом, коли $p=1$, прихильниками першої техніки є Тульчиєв і де Леон, у той час як другий технічний підхід інтенсивно розвивають Ольга Крупкова та Модіньо.

Для автономних систем звичайних диференційних рівнянь, як і для їх розв'язків, запроваджуємо поняття *ві́дмірної байдужости*. Якщо кожен місцевий розв'язок (local solution) деякої системи звичайних диференційних рівнянь переходить знову у (можливо, иньший) місцевий розв'язок під час місцевої гладкої переміни незалежного змінного, кажемо, що відповідна система рівнянь є ві́дмірно байдужа. Класи одновимірних розв'язків, еквівалентних щодо переміни незалежного змінного, якщо вони не є (помісно) постійні, як відомо, визначають помісно унурені одновимірні підмноговиди (immersed local submanifolds). Поняття *ві́дмірної байдужости* дає можливість уникнути неоднозначного трактування вислову „параметрична незалежність“: можна розглядати цілі сі́м'ї параметризованих деяким зовнішнім параметром розв'язків, самих рівнянь, інтеґралів тощо, що геть зовсім не корелюється з поняттям ві́дмірної байдужости одного певного рівняння.

Монографії [19] та [15] містять доволі повний перелік літератури щодо диференційно-геометричних і цілісно-аналітичних підходів (global-analytic approach) до прямого та оберненого варіяційного завдання на многовидах змінних величин, включаючи і письма щойно згаданих авторів.

З метою подати рівняння руху в т. зв. „явно коваріянтному“ (співзмінному) вигляді доцільно впровадити простір швидкостей Ересмана вищого порядку са́ме над конфіґураційним многовидом M частки, $T^k M = \{x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha \ldots x^\alpha_{(k)}\}$. Надалі нераз уживатимемо позначок u^α, $\dot{u}^\alpha$, $\ddot{u}^\alpha$, $u^\alpha_{(r)}$ замість $\dot{x}^\alpha$, $\ddot{x}^\alpha$, $x^\alpha_{(3)}$, $x^\alpha_{(r+1)}$, а також $x^\alpha_{(0)}$ часом означатиме просто x^α. Досить гладке (за необхідністю, продиктованою порядком застосованих упохіднень) відображення $\zeta \mapsto x^\alpha(\zeta)$ називатимемо (відміреною міркою ζ) *стежкою,* тоді його образ в M утворить (безві́дмірну) *борозку,* яка у випадку, коли M є простором-часом, зветься (безві́дмірною) *світовою ниттю.* Оскільки нас цікавитимуть тільки такі варіяційні рівняння (порядку s),

$$\mathcal{E}_\alpha\left(x^\alpha, u^\alpha, \dot{u}^\alpha, \ddot{u}^\alpha, \ldots, u^\alpha_{(s-1)}\right) = 0, \tag{7}$$

які описують **са́ме безві́дмірні** світові ниті часток, то функція Ляґранжа $\mathcal{L}$ має задовольняти умови Цермело, які в нашому випадку, коли лише похідні не вище другого порядку присутні в $\mathcal{L}$, є такі:

$$u^{\beta}\frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\mathcal{L}+2\dot{u}^{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{u}^{\beta}}\mathcal{L}=\mathcal{L},$$
$$u^{\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{u}^{\beta}}\mathcal{L}=0.$$

У цьому підході незалежна змінна ζ (яку ще називаємо *міркою* вздовж світової ниті) не залучена до конфіґураційного многовиду M. Тому са́ме простір T^kM є відповідним кандидатом на роль многовиду-основи, на якому і слід ставити варіяційне завдання в автономному вигляді. Можна залучити параметр ζ до конфіґураційного многовиду шляхом запровадження тривіяльного волокнистого многовиду (fibered manifold) $\mathbb{R}\times M\to\mathbb{R}$, $\zeta\in\mathbb{R}$, разом з його продовженням k-го порядку, $J^k(\mathbb{R},M)$, тобто простором, що утворений струменями k-го порядку від перекроїв волокнистого многовиду $Y=\mathbb{R}\times M$ над $\mathbb{R}$. Кожен такий перекрій многовиду Y є просто графом в $\mathbb{R}\times M$ деякої місцевої стежки $x^{\alpha}(\zeta)$ у многовиді M. Для кожного $r\in\mathbb{N}$ існує очевидний відмет (projection)

$$p_0^r : J^r(\mathbb{R},M)\to T^rM\,, \tag{8}$$

означений ось як. Многовид T^rM складений з похідних до порядку r від кривих ліній $x^{\alpha}(\zeta)$ в M у пункті $0\in\mathbb{R}$. Якщо для кожного $\tau\in\mathbb{R}$ позначимо літерою $\mathcal{R}^{\tau}$ відображення $\zeta\mapsto\zeta+\tau$ з $\mathbb{R}$ на себе, то в цьому позначенні вказаний вище відмет є:

$$p_0^r:\left(\tau;\, x^{\alpha}(\tau),\, \frac{d}{d\zeta}x^{\alpha}(\tau),\, \frac{d^2}{d\zeta^2}x^{\alpha}(\tau),\ldots,\frac{d^r}{d\zeta^r}x^{\alpha}(\tau)\right)\mapsto$$
$$\mapsto\left(\left(x^{\alpha}\circ\mathcal{R}^{\tau}\right)(0),\,\frac{d}{d\zeta}\left(x^{\alpha}\circ\mathcal{R}^{\tau}\right)(0),\,\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(x^{\alpha}\circ\mathcal{R}^{\tau}\right)(0),\ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\frac{d^r}{d\zeta^r}\left(x^{\alpha}\circ\mathcal{R}^{\tau}\right)(0)\right).$$

З допомогою відмету (8) кожну функцію Ляґранжа $\mathcal{L}$, означену спочатку на просторі T^kM, можна перетягнути назадгузь (backwards) до многовиду $J^k(\mathbb{R},M)$ і там вона визначить деяку функцію $\mathcal{L}_0$ очевидною формулою: $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}\circ p_0^k$. Диференційна форма

$$\lambda=\mathcal{L}_0 d\zeta \tag{9}$$

встановлює варіяційне завдання в *поширено-параметричній* формі: під час побудови нового конфіґураційного многовиду $\mathbb{R}\times M$ незалежна змінна ζ зазнає штучного подвоєння. Ця побудова нам знадобиться надалі.

Повернімось до варіяційного завдання, поставленого на многовиді T^kM деякою функцією Ляґранжа $\mathcal{L}$. Як тільки накладемо умови Цермело, завдання стає виродженим. Один спосіб уникнути виродження полягає в скороченні числа швидкостей, очевидно, коштом втрати властивости, знаної як „координатна однорідність“ рівняння (7). Уявімо, що задано якийсь спосіб сеґреґації змінних $x^{\alpha}\in M$ на змінні $t\in\mathbb{R}$ та $x^i\in Q$, $\dim Q=\dim M-1$, який перетворює M в деяку волокнистість (fibration) $M\approx\mathbb{R}\times Q$ над $\mathbb{R}$. Многовид струменів $J^r(\mathbb{R},Q)$ є місцевим вираженням того, що називається многовидом $C^r(M,1)$, збудованим з елементів торкання порядку r одновимірних місцевих підмноговидів, унурених у многовид M. Нутрішньо добре означений відмет множини ненульових елементів з T^rM на многовид

$C^r(M,1)$ в цьому місцевому (і далеко не „коваріянтному“) виразенні позначаємо так:

$$\wp^r : T^r M \setminus \{0\} \to J^r(\mathbb{R}, Q). \tag{10}$$

У третьому порядку цей відмет неявно описують наступні формули, в яких місцеві координати в $J^r(\mathbb{R}, Q)$ позначені як t, x^i, v^i, v'^i, $\mathrm{v}''^i, \ldots, \mathrm{v}^i_{(r-1)}$, і в подальшому $\mathrm{v}^i_{(0)}$ час від часу вживатиметься замість v^i:

$$\begin{aligned} &\dot{t}\,\mathrm{v}^i = u^i, \\ &(\dot{t})^3 \mathrm{v}'^i = \dot{t}\,\dot{u}^i - \ddot{t}\,u^i, \\ &(\dot{t})^5 \mathrm{v}''^i = (\dot{t})^2 \ddot{u}^i - 3\dot{t}\,\ddot{t}\,\dot{u}^i + \left[3(\ddot{t})^2 - \dot{t}\,t_{(3)}\right] u^i. \end{aligned} \tag{11}$$

Не існує жодного добре означеного відмету з многовиду $C^r(M,1)$ на простір незалежної змінної $\mathbb{R}$, тому вираз

$$\Lambda = L\left(t; \mathrm{x}^i, \mathrm{v}^i, \mathrm{v}'^i, \mathrm{v}''^i, \ldots, \mathrm{v}^i_{(k-1)}\right) dt \tag{12}$$

змінюватиметься залежно від конкретного способу місцевого вираження $M \approx \mathbb{R} \times Q$. Кажемо, що два різні вирази взірця (12) означують одне і те ж варіяційне завдання в параметричній формі, якщо їх ріжниця повністю розкладається не більше як тільки за відтягненими (pulled back) до $C^k(M,1)$ образами ось яких форм торкання, що побутують на многовиді $C^1(M,1)$:

$$\theta^i = d\mathrm{x}^i - \mathrm{v}^i dt. \tag{13}$$

Ці диференційні форми очевидним способом щезають вздовж струменя кожної довільної стежки $\mathbb{R} \to Q$.

Розглядатимемо компоненти варіяційного рівняння

$$\mathrm{E}_i\left(t; \mathrm{x}^i, \mathrm{v}^i, \mathrm{v}'^i, \mathrm{v}''^i, \ldots, \mathrm{v}^i_{(s-1)}\right) = 0, \tag{14}$$

породженого ляґранжіяном (12), як компоненти векторної один-форми

$$\mathrm{e} = \left\{\mathrm{E}_i dt\right\}. \tag{15}$$

Маємо намір подати „однорідний“ опис для сутностей (12) та (15) у термінах деяких таких об’єктів, які побутували б на многовидах $T^k M$ та $T^s M$ відповідно. Не можемо, однак, навпрямець застосувати до ляґранжіяна (12) операцію відтягнення (pull-back) тому, що відтягнена один-форма знову є один-формою, а те, що нам придалося б мати на многовиді $T^k M$, – це мала б буть *функція* Ляґранжа, а не якась форма. Все ж можливо відтягнути (12) вздовж повного шляху, утвореного композицією відметів (8) та (10),

$$p^k = \wp^k \circ p_0^k, \tag{16}$$

аж до многовиду $J^k(\mathbb{R}, M)$. Так отримуємо диференційну форму $(L \circ p^k)dt$. Але ж знову те, до чого прагнемо, мало б бути диференційною формою, яка не містила би иньших диференціялів, окрім самого тільки $d\zeta$ (тобто, повинна бути напів-базовою стосовно відмету $J^k(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}$). На щастя, є дві диференційні форми, dt і $\dot{t}\,d\zeta$, які не відрізняються більше, як тільки на форму торкання

$$\vartheta = dt - \dot{t}\,d\zeta. \tag{17}$$

Тепер згадаємо, що рівнозначні ляґранжіяни, які мають структуру (12), відрізняються не більше, як на форми, кратні до форм торкання (13). Залишається зауважити, що правом (11) відтягнені взад (pulled back) форми торкання (13) розкладаються за формами

$$\vartheta^i = dx^i - u^i d\zeta \tag{18}$$

та (17), і не більше:

$$p^{1*}\theta^i = dx^i - \left(\mathrm{v}^i \circ p^1\right) dt = \vartheta^i - \left(\mathrm{v}^i \circ p^1\right)\vartheta.$$

Отож, кожне варіяційне завдання, поставлене на многовиді $J^k(\mathbb{R}, Q)$ і подане виразом (12), перетворюється в рівнозначне варіяційне завдання

$$\lambda = \left(L \circ p^k\right) \dot{t}\, d\zeta, \tag{19}$$

поставлене на многовиді $J^k(\mathbb{R}, M)$. Функція Ляґранжа цього нового варіяційного завдання

$$\mathcal{L}_0 = \left(L \circ p^k\right) \dot{t} \tag{20}$$

не залежить од параметра ζ і, по суті, може розглядатися як функція, означена лиш на многовиді $T^k M$. Нам зручно варіяційне рівняння (деякого порядку $s \le 2k$), породжене ляґранжіяном (19), розглядати в рамцях формалізму теорії векторно-значних зовнішніх диференційних систем шляхом впровадження ось якої векторної диференційної один-форми, означеної на многовиді $J^s(\mathbb{R}, M)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \mathcal{E}_\alpha\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ldots, x^\alpha_{(s)}\right) d\zeta \right\}. \tag{21}$$

Вирази $\mathcal{E}_\alpha\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ldots, x^\alpha_{(s)}\right)$ у (21), по суті, є добре означені вже на самому многовиді $T^s M$, так само, як і функція $\mathcal{L}_0$. Загалом, збудовані вище конструкції дають можливість стверджувати ось що:

Річ 1. *Якщо диференційна форма (15) відповідає варіяційному рівнянню з ляґранжіяном (12), то вирази*

$$\mathcal{E}_\alpha = \left\{ -u^i \mathrm{E}_i, \dot{t}\, \mathrm{E}_i \right\} \tag{22}$$

відповідають функції Ляґранжа (20).

У цьому випадку рівняння (7) з похідними порядку s описує в „однорідному“ вигляді ті ж самі невідмірні світові ниті частки, яка керується ляґранжіяном (20), що й рівняння (14) для ляґранжіяну, який задає формула (12), а також функція Ляґранжа $\mathcal{L}_0$ очевидним чином задовольняє умови Цермело.

Про формальні аспекти варіяційного числення для кратних інтеґралів у волокнистих просторах (fiber spaces), які лежать в основі геометрії неквантової теорії поля, як і більше про доведення твердження, що міститься в Речі 1, можна довідатися з письма [26].

Критерій варіяційности. Обернене завдання варіяційного числення має свою історію. Виглядає на те, що Сонін [10] вперше застановився над завданням про віднайдення деякого варіяційного диференційного рівняння, рівнозначного до довільного наперед заданого диференційного рівняння, – взагалі кажучи, неваріяційного, – методом пошуку т. зв. „варіяційних домножувачів“. Подальший розвиток математичного варіянту теорії пов’язаний з іменами Гельмгольца, Тонті, Такенса.

Висловлюючись концептуально, вирази, які стоять у лівій частині рівнянь Ойлера–Ляґранжа, є компонентами деякого коваріянтного геометричного об’єкта δL, який, у свою чергу, є результатом застосування деякого диференційного ділача (differential operator) δ, наділеного властивістю $\delta^2 = 0$, до ляґранжіяна L. Критерій варіяційности полягає в застосуванні цього самого дільча δ до лівої частини шуканих рівнянь з подальшим прирівнюванням висліду до нуля. Вся процедура виражається у системі рівнянь з частковими похідними від шуканих виразів Ойлера–Ляґранжа за всіма арґументами, якими, у свою чергу, є похідні від функцій, що підлягають варіяції. Явний запис відповідної системи рівнянь у часткових похідних можна вгледіти в працях багатьох авторів, з яких ще раз назвемо монографію [19], а також статтю [20].

З того, як дозволяє судити моє знаття історії проблеми, виглядає, що Вайнберґ [1] першим узрів перспективу щойно описаного підходу до розв'язання оберненого варіяційного завдання.

Отож, найпершим наміром маємо віднайти у тривимірному просторі-часі варіяційне рівняння третього порядку, яке було б наділене властивістю однакости (symmetry) щодо групи Пуанкаре. З цією метою організовуємо вирази E_i з формули (15) у єдиний геометричний об'єкт, зовнішню один-форму

$$\mathsf{e}_0 = \mathsf{E}_i dx^i, \tag{23}$$

означену на многовиді $J^s(\mathbb{R}, Q)$. Тепер векторну диференційну форму (15) слід розглядати як координатне вираження нутрішнього диференційно-геометричного об'єкта

$$\mathsf{e} = \mathsf{e}_i dx^i = \mathsf{E}_i dt \otimes dx^i = dt \otimes \mathsf{e}_0. \tag{24}$$

Так збудовану диференційну форму e можна розглядати як елемент степенованого модуля (graded module) зовнішніх диференційних форм на многовиді $J^s(\mathbb{R}, Q)$, напів-базових відносно $\mathbb{R}$, із значеннями у в'язці $\wedge T^* Q$ степенованих алгебр (graded algebras) скалярних зовнішніх диференційних форм на многовиді Q. Ясна річ, як наслідок одновимірності многовиду $\mathbb{R}$, по суті лише скалярні функції (тобто напів-базові нуль-форми) та напів-базові один-форми (тобто винятково члени з dt) існують насправді. Також зауважимо, що кожну (скалярну) диференційну форму на многовиді Q природно розглядати як диференційну форму на просторі $T^r Q$, тобто як елемент степенованої алгебри перекроїв в'язки $\wedge T^*\left(T^r Q\right)$.

Для довільного $s \in \mathbb{N}$ нехай $\Omega_s(Q)$ означає алгебру (скалярних) диференційних форм на многовиді $T^s Q$ з коефіцієнтами, залежними від $t \in \mathbb{R}$. Можна розвинути деяке числення в $\Omega_s(Q)$ шляхом впровадження ділачів – вертикального (стосовно $\mathbb{R}$) диференціяла d_v і повної (або ж формальної „часової“) похідної D_t – ось за якими приписами:

$$d_v f = \frac{\partial f}{\partial \mathsf{x}^i} d\mathsf{x}^i + \frac{\partial f}{\partial \mathsf{v}^i_{(r)}} d\mathsf{v}^i_{(r)}, \quad d_v{}^2 = 0,$$

так що диференціяли $d_v \mathsf{x}^i$ і $d_v \mathsf{x}^i_{(r)}$ збігаються відповідно з $d\mathsf{x}^i$ і $d\mathsf{x}^i_{(r)}$, і

$$D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathsf{v}^i \frac{\partial f}{\partial \mathsf{x}^i} + \mathsf{v}^i_{(r+1)} \frac{\partial f}{\partial \mathsf{v}^i_{(r)}}, \quad D_t d_v = d_v D_t.$$

Пригадаймо поняття *упохіднення* в степенованих алгебрах, наділених узагальненими переміжними (commutative) співвідношеннями, якою і є алгебра $\Omega_s(Q)$. Якийсь ділач D зветься упохідненням степеня q, якщо для будь-якої диференційної форми ϖ степеня p і будь-якої иньшої диференційної форми w справджується співвідношення

$$D(\varpi \wedge w) = D(\varpi) \wedge w + (-1)^{pq} \varpi \wedge D(w).$$

Для того, щоб повищі означення ділачів d_v і D_t були повними, необхідно вимагати, аби d_v було упохідненням степеня 1, тоді як D_t – упохідненням степеня 0. Для подальших рахунків потребуватимемо ще одного ділача, упохідження степеня 0, що його позначимо ι і означимо за посередництвом його дії на функції та одинформи (які разом помісно породжують алгебру $\Omega_s(Q)$):

$$\iota f = 0,\ \iota dx^i = 0,\ \iota dv^i = dx^i,\ \iota dv^i_{(r)} = (r+1)\ dv^i_{(r-1)}.$$

Нехай тепер ділач $\deg$ вимірює степінь диференційної форми. Поняття *ляґранжевого диференціялу* δ [39, 18] спочатку впроваджується через його дію на елементи з $\Omega_s(Q)$,

$$\delta = \left(\deg + \sum_{r>0} \frac{(-1)^r}{r!} D_t{}^r \iota^r\right) d_v,$$

а вже опісля ось яким простим чином поширюється до деякої дії на ввесь степенований модуль напів-базових диференційних форм, означених на многовиді $J^s(\mathbb{R}, Q)$ з множниками у в’язці $\wedge T^*\left(T^r Q\right)$:

$$\delta\left(\omega_i dt \otimes dx^i\right) = dt \otimes \delta\left(\omega_i dx^i\right),$$
$$\delta\left(\omega_i^r dt \otimes dv^i_{(r)}\right) = dt \otimes \delta\left(\omega_i^r dv^i_{(r)}\right).$$

Операція δ має властивість $\delta^2 = 0$. Диференційно-геометричні об’єкти (12) і (24) пов’язані співвідношенням

$$\mathrm{e} = \delta\Lambda = dt \otimes \delta L. \tag{25}$$

Тепер критерій того, що довільна сім’я виразів $\{\mathrm{E}_i\}$ у формулі (15) є лівою частиною варіяційного рівняння, породженого деяким ляґранжіяном, має вигляд

$$\delta \mathrm{e} = dt \otimes \delta \mathrm{e}_0 = 0, \tag{26}$$

де форма e збудована з виразів $\{\mathrm{E}_i\}$ з допомогою (23) і (24).

З иньшого боку, можна дослівно застосувати повищу конструкцію до відповідних об’єктів на многовиді $J^s(\mathbb{R}, M)$ із (8) з тим, щоб отримати ділач, диференціял Ляґранжа δ^Y, що діє на пів-базові, стосовно $\mathbb{R}$, диференційні форми на многовиді $J^s(\mathbb{R}, M)$ із значеннями у в’язці $\wedge T^*\left(T^s M\right)$. В алгебрі $\Omega_s(M)$ ділач δ^Y зберігає під-алгебру диференційних форм, які не залежать від параметра $\zeta \in \mathbb{R}$. Звуження дії ділача δ^Y до алгебри форм, які насправді означені вже тільки на многовиді $T^s M$, позначимо δ^T. Якщо в укладі (9) функція Ляґранжа $\mathcal{L}_0$ не залежить од параметра $\zeta \in \mathbb{R}$, як у випадку (20), то замість застосовувати ділача δ^Y до форми λ з виразу (9) та до форми

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha dx^\alpha = \mathcal{E}_\alpha d\zeta \otimes dx^\alpha \tag{27}$$

з виразу (21), можна застосувати звужений ділач δ^T до функції Ляґранжа $\mathcal{L}_0$ і до диференційної форми

$$\varepsilon_0 = \mathcal{E}_\alpha dx^\alpha. \tag{28}$$

У випадку функції Ляґранжа (20) всі три критерії, які описуються відповідно укладами $\delta^Y \varepsilon = 0$,

$$\delta^T \varepsilon_0 = 0 \tag{29}$$

і укладом (26), є рівнозначними, а варіяційні рівняння, утворені виразами $\varepsilon = \delta^Y \lambda$ на основі (19), (27), $\varepsilon_0 = \delta^T \mathcal{L}_0$ на основі (20), (28) та виразом e з (25) всі рівнозначні з рівнянням (7). Вирази (12) і (15) не є, як кажуть, „загально коваріянтними“ (співзмінними), в той час як вираз (28) таким є. Зате критерій (29) слід застосувати вкупі з умовами Цермело, а критерій (26) є самодостатнім.

Подання системи варіяційних виразів $\{\mathsf{E}_i\}$ у вигляді напів-базової (себто такої, що містить тільки диференціял dt) диференційної форми зі значеннями у в'язці один-форм на конфіґураційному многовиді Q є зовсім природним:

– ляґранжева густина (яку називаємо *ляґранжіяном*) є один-формою відносно dt тільки;
– покликання виразів Ойлера–Ляґранжа, за суттю їх походження, полягає в подальшому підрахунку їх значення на інфінітезимальних варіяціях, тобто на векторних полях, дотичних до конфіґураційного многовиду Q вздовж переламних стежок (critical paths) (щодо відповідного варіяційного завдання); отож, набір $\{\mathsf{E}_i\}$ повинен задавати таку лінійну форму на просторі перекроїв в'язки TQ, множники якої залежать від вищих похідних.

Лепажівський еквівалент. Система рівнянь з частковими похідними щодо функцій E_i , яка виникає з умови (26), набирає конкретнішого вигляду у випадку, коли розглядаємо вираз Ойлера–Пуасона (тобто ліву частину звичайного диференційного рівняння Ойлера–Ляґранжа) третього порядку. Запровадимо позначення $\mathbf{D_1}$ для твірника розподілу Картана найнижчого порядку:

$$\mathbf{D_1} = \partial_t + \mathsf{v}\,.\partial_\mathsf{x}\,.$$

Річ 2 ([4]). *Нехай скісна матриця* A*, симетрична матриця* B*, а також стовпець* c *залежать од змінних* t, x^i *і* v^i *та задовольняють таку систему диференційних рівнянь у часткових похідних:*

$$\begin{aligned}
&5\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0,\\
&2\mathsf{B}_{[ij]} - 3\mathbf{D_1}\mathsf{A}_{ij} = 0,\\
&2\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{B}_{j]l} - 4\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{j]l} + \partial_{\mathsf{x}^l}\mathsf{A}_{ij} + 2\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{v}^l}\mathsf{A}_{ij} = 0,\\
&\partial_{\mathsf{v}(i}\mathsf{c}_{j)} - \mathbf{D_1}\mathsf{B}_{(ij)} = 0,\\
&2\partial_{\mathsf{v}^l}\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - 4\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{B}_{j]l} + \mathbf{D_1}^2\partial_{\mathsf{v}^l}\mathsf{A}_{ij} + 6\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0,\\
&4\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{c}_{j]} - 2\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - \mathbf{D_1}^3\mathsf{A}_{ij} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Найзагальніший вигляд рівнянь Ойлера–Пуасона третього порядку є такий:

$$\mathsf{A}.\mathsf{v}'' + (\mathsf{v}'.\partial_\mathsf{v})\mathsf{A}.\mathsf{v}' + \mathsf{B}.\mathsf{v}' + \mathsf{c} = 0. \tag{31}$$

Завдяки афінній будові лівої частини рівняння (31) можемо поруч з диференційною формою (24) взяти під увагу ще й иньшу, коефіцієнти якої не залежатимуть од похідних третього порядку:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \mathsf{A}_{ij}\,d\mathsf{v}'^j \otimes d\mathsf{x}^i + \mathsf{k}_i\,dt \otimes d\mathsf{x}^i,\\
\mathsf{k} &= (\mathsf{v}'.\partial_\mathsf{v})\mathsf{A}.\mathsf{v}' + \mathsf{B}.\mathsf{v}' + \mathsf{c}.
\end{aligned} \tag{32}$$

З точки зору віднайдення тільки голономних місцевих розв'язків у многовиді $J^3(\mathbb{R}, Q)$ вважають рівнозначними такі зовнішні диференційні системи, які відрізняються не більше як тільки членами, кратними до контактної форми (13) і форм

$$\theta'^i = d\mathsf{v}^i - \mathsf{v}'^i dt, \quad \theta''^i = d\mathsf{v}'^i - \mathsf{v}''^i dt.$$

У цьому розумінні диференційні форми (32) та (24) рівнозначні:

$$\epsilon - \mathrm{e} = \mathrm{A}_{ij}\theta''^{j} \otimes d\mathrm{x}^{i}.$$

Диференційну форму (32) можна вповні сприймати як альтернативне подання *лепажівського еквівалента* [19] диференційної форми (24).

Незмінне рівняння Ойлера–Пуасона. У першу чергу цікавимось тими варіяційними рівняннями, котрі наділені деякою однакістю. Нехай $X(\epsilon)$ означає покомпонентну дію деякого твірника місцевих перетворень X на векторну диференційну форму ϵ. Твердження, що зовнішня диференційна система, породжена формою ϵ, наділена інфінітезимальною однакістю X, означає, що можна піднайти такі матриці Φ, Ξ, і Π, залежні від v та v', що

$$X(\epsilon) = \Phi.\epsilon + \Xi.(\mathrm{x} - \mathrm{v}dt) + \Pi.(d\mathrm{v} - \mathrm{v}'dt). \tag{33}$$

Рівняння (33) виражає умову того, що дві векторні зовнішні диферентційні системи, перша з яких породжена векторною диференційною формою ϵ, а друга – зсунутою формою $X(\epsilon)$, суть алгебрично рівнозначні. Для систем, породжених **один**-формами (як воно і є в нашому прикладі), ця умова зовсім рівнозначна з вимогою, аби множина місцевих розв'язків відповідної зовнішньої диференційної системи зберігалась під дією одно-параметричної підгрупи Лі, породженої полем X. Вкажемо на дві переваги описаного методу:

- поняття однакости тут формулюємо в якомога загальній, але ще змістовній формі;
- завдання пошуку твірників перетворень однакости для диференційного рівняння переповідається в алгебричних термінах з допомогою методу невизначених множників Φ, Ξ, та Π;
- диференційний порядок нелінійних співвідношень зменшується на одиницю (працюємо на многовиді $J^2(\mathbb{R}, Q)$ замість $J^3(\mathbb{R}, Q)$).

Про загальну науку щодо поєднання формалізмів зовнішніх диференційних систем і продовжених точкових перетворень Лі більше написано в праці [27].

Розглядаючи групу Пуанкаре, уважаємо, що A та k в (32) не залежать од t і x. Варто вказати загальний вираз для твірника місцевої дії групи Лоренца, параметризованого скісною матрицею Ω і деяким вектором π:

$$\begin{aligned} X = &-(\pi\cdot\mathrm{x})\,\partial_t + t\,\pi.\partial_{\mathrm{x}} + \Omega\cdot(\mathrm{x}\wedge\partial_{\mathrm{x}}) + \pi.\partial_{\mathrm{v}} + (\pi\cdot\mathrm{v})\,\mathrm{v}.\partial_{\mathrm{v}} + \Omega\cdot(\mathrm{v}\wedge\partial_{\mathrm{v}}) + \\ &+ 2(\pi\cdot\mathrm{v})\,\mathrm{v}'.\partial_{\mathrm{v}'} + (\pi\cdot\mathrm{v}')\,\mathrm{v}.\partial_{\mathrm{v}'} + \Omega\cdot(\mathrm{v}'\wedge\partial_{\mathrm{v}'}). \end{aligned}$$

У цьому виразі центральна крапка позначає нутрішній (скалярний) добуток векторів чи тензорів, а опущена крапка – згортку рядка з наступним стовпцем.

Система рівнянь (30), (33) може мати багато розв'язків, або не мати їх зовсім, залежно од вимірності конфіґураційного многовиду. Наприклад, у випадку, коли конфіґураційний многовид є одновимірним, взагалі не може існувати жодної скісної матриці A. У вимірності три система рівнянь в часткових похідних (30), (33) не має розв'язків [5]. Цікаво, що у вимірності два розв'язок існує і є **єдиним** (з точністю до одного скалярного параметра m), як видно з такого.

Річ 3. *Інваріянтне рівняння Ойлера–Пуасона третього порядку для релятивіського двовимірного руху є таке:*

$$-\frac{*\mathrm{v}''}{(1+\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})^{3/2}} + 3\frac{*\mathrm{v}'}{(1+\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})^{5/2}}(\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}') - \frac{m}{(1+\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})^{3/2}}((1+\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})\mathrm{v}' - (\mathrm{v}'\cdot\mathrm{v})\mathrm{v}) = 0. \tag{34}$$

У цьому укладі двоїсті вектори записані в загальноприйнятих позначках:

$$(*\,\mathrm{w})_i = \epsilon_{ji}\mathrm{w}^j.$$

Повне узасаднення Речі 3 можна вичитати з праць [22, 23].

Нам відомі дві різні функції Ляґранжа для лівої частини рівняння (34):

$$L_1 = -\frac{\mathrm{v}'^2\mathrm{v}^1}{\sqrt{1+\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i}\,(1+\mathrm{v}_2\mathrm{v}^2)} + m\sqrt{1+\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i}\,,$$

$$L_2 = \frac{\mathrm{v}'^1\mathrm{v}^2}{\sqrt{1+\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i}\,(1+\mathrm{v}_1\mathrm{v}^1)} + m\sqrt{1+\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i}\,.$$

Вони відрізняються на повну похідну:

$$L_2 - L_1 = \frac{d}{dt}\arctan\frac{\mathrm{v}^1\mathrm{v}^2}{\sqrt{1+\mathrm{v}_i\mathrm{v}^i}}.$$

З допомогою припису, який міститься в Речі 1, негайно отримуємо „однорідну“ подобу рівняння (34)

$$-\frac{\ddot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} + 3\frac{\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^5}(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}) - \frac{m}{\|\mathbf{u}\|^3}((\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} - (\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}) = 0 \tag{35}$$

з відповідною сім’єю функцій Ляґранжа

$$\mathcal{L}_1 = \frac{u^1(\ddot{t}u_2 - \dot{u}_2\dot{t})}{\|\mathbf{u}\|\left(u_2u^2 + u_3u^3\right)} + m\|\mathbf{u}\|,$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{u^2(\dot{u}_1\dot{t} - \ddot{t}u_1)}{\|\mathbf{u}\|\left(u_1u^1 + u_3u^3\right)} + m\|\mathbf{u}\|,$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\dot{t}\,(\dot{u}_2u_1 - \dot{u}_1u_2)}{\|\mathbf{u}\|\left(u_1u^1 + u_2u^2\right)} + m\|\mathbf{u}\|\,.$$

Ріжницю між $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ одержуємо просто:

$$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = \dot{t}\,(L_2\circ p^2 - L_1\circ p^2) = \frac{d}{d\zeta}\arctan\frac{(\mathrm{v}^1\circ p^2)(\mathrm{v}^2\circ p^2)}{\sqrt{1+(\mathrm{v}_i\circ p^2)(\mathrm{v}^i\circ p^2)}}$$
$$= \frac{d}{d\zeta}\arctan\frac{u^1u^2}{\dot{t}\sqrt{u_\alpha u^\alpha}}\,.$$

Безпосереднє обчислення підтверджує це співвідношення. Про третій вираз для функції Ляґранжа $\mathcal{L}_3$ можна здогадатися, підмітивши циклічну симетрію в перейменуванні осей координат у просторі-часі.

Для того, щоб варіяційні рівняння були непарного (третього) порядку, функція Ляґранжа повинна бути афінним виразом щодо найстарших (третіх) похідних. Вислідом попереднього дослідження [5] не варто навіть пробувати шукати строго незмінну таку функцію Ляґранжа в просторі-часі вимірності, більшої за два. Але узагальнена кількість руху

$$\mathcal{P} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}} - \frac{d}{d\zeta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{u}}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} + m\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \tag{36}$$

не залежить од конкретного вибору однієї з повищого сімейства функцій Ляґранжа.

Рівняння (35), вперше отримане в 1984$^{\text{му}}$ році (гляди [6]), несе певне фізичне навантаження. Легко побачити, що воно повторює рівняння двовимірного руху вільної релятивіської дзиґи (6) з власною масою $m_0 = m\,\eta_3\sigma_3$. Його ліва частина є повною похідною від виразу кількости руху (36), який пізніше отриманий методом невизначених множників Ляґранжа у письмі [34] на стор. 48, – в инших позначках і виходячи із зовсім инших міркувань.

У формулюванні твердження, яке міститься в Речі 3, покладені значення $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$. У тривимірному (лже)евклідівському просторі $\{t, x^1, x^2\}$ немає глузду в розгляді різних знаків при величинах η_1, η_2. Але подані вирази для варіяційного рівняння та відповідних функцій Ляґранжа можна розглядати і у правдивому евклідівському просторі.

Підсумок. Нашою метою було запровадити комбінований метод дослідження, який полягав би в залученні принципів однакости до способів вирішення оберненого завдання варіяційного числення в термінах векторно-значних диференційних форм. Також запропоновано певний зручний алгоритм переходу від автономного варіяційного завдання до варіяційного завдання в параметричній формі. Приклад, вирішений до кінця, виказує деякі властиві риси варіяційного числення:

– неіснування (у нашому випадку) нутрішнім чином належно означеної та незмінної функції Ляґранжа, в той час, коли нутрішньо добре означене і наділене однакістю щодо групи Пуанкаре варіяційне рівняння існує та породжується кожним членом сімейства вироджених функцій Ляґранжа, які переходять одна в иньшу перенумерацією координатних осей лоренцівської системи відліку;
– узагальнена кількість руху (36) добре означена; її вираз не залежить від вибору однієї із наведених вище функцій Ляґранжа.
– кожен ляґранжіян містить одмінний од иньших набір похідних найвищого порядку, так що сума ляґранжіянів не є ляґранжіяном найнижчого порядку для розгляненого рівняння.

Більш формалізовані методи розгляду варіяційних завдань одночасно з властивостями їх однакости щодо груп перетворень є суттю науки про незмінні варіяційні дво-комплекси [17]. Але ці методи поки що не охоплюють випадків, коли для незмінних рівнянь Ойлера–Ляґранжа немає незмінних (тим паче, нутрішньо добре означених) ляґранжіянів.

Окремо стоїть завдання узагальнення рівнянь Ойлера–Пуасона, отриманих в пласкому просторі, на випадок (лже)ріманівського простору. Для варіяційних рівнянь третього порядку в двовимірному просторі, які з необхідністю мусять мати розв'язками **суттєво ві́дмірні стежки**, це завдання вирішене в інтернет-письмі [28] та у працях [7, 29, 30].

1. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
2. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
3. *Лейко С. Г.* Экстремали функционалов поворота для кривых псевдориманова пространства и траектории спин-частиц в гравитационных полях // Докл. Росс. акад. наук. Математика. – 1992. – **325**, № 4. – С. 659–663.
4. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – К.: Наук. думка, 1984. – **20**. – С. 16–19.
5. *Мацюк Р. Я.* Пуанкаре-инвариантные уравненя движения в лагранжевой механике с высшими производными. Дис. … к-та физ.-мат. наук. – Львов, 1984. – 136 с.
6. *Мацюк Р. Я.* Лагранжев анализ инвариантных уравнений движения третьего порядка в релятивистской механике классических частиц // ДАН СССР. – 1985. – **282**, № 4. – С. 841–844.
7. *Мацюк Р. Я.* Варіяційність з похідними другого порядку, релятивіське приспішення та взаємодія „дзиги“ з тензором кривини у дво-вимірному просторі-часі // Фізичний збірник НТШ. – 2008. – **7**. – С. 542–556.
8. *Нерсесян А. П.* Лагранжева модель безмассовой частицы на пространственноподобных кривых // Теор. мат. физика. – 2000. – **126**, № 2. – С. 179–195.
9. *Пляцко Р. М.* Прояви гравітаційної ультра-релятивістської спін-орбітальної взаємодії. – К.: Наук. думка, 1988. – 148 с.
10. *Сонин Н. Я.* Объ определении максимальныхъ и минимальнъх свойствъ // Варшавские университетские известия. – 1886. – **1**–**2**. – С. 1–68.

11. *Якупов М. Ш.* Редукция уравнений движения пробной частицы со спином // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1983. – **19**. – С. 146–162.
12. *Arodź H., Sitarz A., Węgrzyn* P. On relativistic point particles with curvature-dependent actions // Acta Phys. Polon. – 1989. – **B20**, № 11. – P. 921–939.
13. *Arreaga G., Capovilla R., Guven J.* Frenet-Serret dynamics // Class. Quant. Grav. – 2001. – **18**, № 23. – P. 5065–5083.
14. *Bopp F.* Feldmechanische Begrüundung der Diracschen Wellengleichung // Zf. für Naturf. – 1948. – **3a**, № 8–11. – P. 564–573.
15. *de Leon M., Rodrigues P. R.* Generalized classical mechanics and field theory. – Amsterdam: North Holland, 1985. – XVI+290 p.
16. *Hönl H.* Mechanik und Massenspektrum der Elementarteilchen // Zf. für Naturf. – 1948. – **3a**, № 8–11. – P. 573–583.
17. *Kogan I., Olver J.* Invariant Euler–Lagrange equations and the invariant variational bicomplex // Acta Appl. Math. – 2003. – **76**, № 2. – P. 137–193.
18. *Kolář I.* On the Euler-Lagrange differential in fibred manifolds // Rep. Math. Phys. – 1977. – **12**, № 3. – P. 301–305.
19. *Krupková O.* The geometry of ordinary variational equations // Berlin: Springer, 1997. – X+254 p.
20. *Ławruk E., Tulczyjew W. M.* Criteria for partial differential equations to be Euler–Lagrange equations // J. Diff. Equat. – 1977. – **24**, № 2. – P. 211–225.
21. *Mathisson M.* Neue Mechanik materieller Systeme // Acta Phys. Polon. – 1937. – **6**, III. – P. 163–200.
22. *Matsyuk R. Ya.* Third order relativistic dynamics: classical spinning particle travelling in a plane // Condenced Matter Phys. – 1998. **1**, №3[15]. – P. 453–462
23. *Matsyuk R. Ya.* The next variational prolongation of the Euclidean space // Tensor. – 2007. – **68**, № 1. – P. 1–9.
24. *Matsyuk R. Ya.* Differential geometric mechanisms in Ostrohrads'kyj relativistic spherical top dynamics // Ukrainian J. of Physics. – 2003. – **48**, № 4. – P. 341–349.
25. *Matsyuk R. Ya.* Autoparallel variational description of the free relativistic top third order dynamics. // Differential Geometry and Its Applications. Proceedings of the 8th International Conference on Differential Geometry and Its Applications. Opava, Czech Republic, August 27–31, 2001. – Opava: Silesian University at Opava, 2001. – P. 447–459.
26. *Matsyuk R. Ya.* Variation by parts and vector differential forms in higher order variational calculus on fibred manifolds // Mat. Stud. – 1999. – **11**, № 1. – P. 85–107.
27. *Matsyuk R. Ya.* Symmetries of vector exterior differential systems and the inverse problem in second-order Ostrohrads'kyj mechanics // J. Nonlinear Math. Phys. – 1997. – **4**, № 1–2. – P. 89–97.
28. *Matsyuk R. Ya.* The Variational Principle for the uniform acceleration and quasi-spin in two dimensional space-time // SIGMA. – 2008. – **43**, №016; arXiv:0802.0751.
29. *Matsyuk R. Ya.* Variationality of geodesic circles in two dimensions // Differential Geometry and Its Applications. Proceedings of the 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications. Olomouc, Czech Republic, August 27–31, 2007. – Singapore: World Scientific Publishing, 2008. – P. 635–642.
30. *Matsyuk R. Ya.* Second order variational problem and 2-dimensional concircular geometry // Travaux math. – 2008. – **XVIII**. – P. 125–137.
31. *Natario J.* Tangent Euler Top in General Relativity // Commun. Math. Phys. – 2008. – **281**, № 2. – P. 387–400.
32. *Nesterenko V. V., Feoli A., Scarpetta G.* Dynamics of relativistic particles with Lagrangians dependent on acceleration // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 10. – P. 5552–5564.
33. *Plyatsko R., Stefanyshyn O.* Mathisson equations: non-oscillatory solutions in a Schwarzschild field // Acta. Phys. Pol. B. – 2008. – **39**, № 1. – P. 23–34.
34. *Plyushchay M. S.* Relativistic massive particle with higher curvatures as a model for the description of bosons and fermions // Phys. Lett. B. – 1990, **235**, № 1. – P. 47–51.
35. *Riewe F.* Relativistic classical spinning-particle mechanics // Il Nuovo Cim. – 1972. – **8B**, № 1. – P. 271–277.
36. *Saunders D. J.* The geometry of jet bundles. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – VIII+254 p.
37. *Scarpetta G.* Relativistic kinematics with Caianiello's maximal proper accelleration // Lett. Nuovo. Cim. – 1984. – **41**, № 2. – P. 51–58.

38. *Tulczyjew W.* Motion of multipole particles in general relativity theory // Acta. Phys. Polon. – 1959. – **28**, V. – P. 393–409
39. *Tulczyjew W.* Sur la différentielle de Lagrange // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A et B. – 1975. – **280**, № 19. – P. A1295–A1298.
40. *Weyssenhoff J., Raabe A.* Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles // Acta Phys. Polon. – 1947. – **9**, I. – P. 7–18.

ИНВАРИАНТНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Последовательно применяются некоторые средства внутренней дифференциальной геометрии, фрагментарно описанные в предыдущих работах, к конкретной задаче о нахождении Пуанкаре-инвариантного вариационного уравнения движения третьего порядка в трёхмерном пространстве-времени. Исходя исключительно из соображений вариационности и симметрии, получим выражение для количества движения релятивистской частицы с кривизной, как нульмерного аналога жёсткой струны.

THIRD ORDER INVARIANT VARIATIONAL EQUATIONS IN $2+1$ SPECIAL RELATIVITY

Some means of the intrinsic differential geometry and of the formal theory of differential equations are consistently applied to a revisited problem of the variational formulation of the only invariant third order differential equation of motion in three-dimensional space-time, previously. The model presents a suggestive description, in found terms of generalized mechanics, of the relativistic quasi-classical spinning particle, moving in two dimensions according to the Mathisson–Papapetrou equations without gravity.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.01.09