КОМИССИЯ ПО ГРАВИТАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕКЦИЯ ГРАВИТАЦИИ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО СОВЕТА
МИНИСТЕРСТВА ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ ВСЕСОЮЗНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ГРАВИТАЦИИ

(VI СОВЕТСКАЯ
ГРАВИТАЦИОННАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,
ИТФ АН СССР, МГПИ, УДН,
МОСКВА, ИЮЛЬ 1984 г.)

3—5 июля 1984 г.

ред. Я.П. Терлецкий

Издательство Университета дружбы народов
1984

Тезисы докл. Всесоюзн. кон-ции „Соврем. теорет. и экспер. проб-мы теории относит. и гравитации", Москва 1984. Изд. УДН, 1984.

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ТРАЕКТОРИЙ ЧАСТИЦ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОКРУЖНОСТИ, РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ И КЛАССИЧЕСКИЙ СПИН.

Р.Я. Мацюк
ИППММ, Львов

Исследуется вопрос существования лагранжиана второго порядка для уравнения равноускоренного движения (оно же уравнение геодезических окружностей [I])

$$\dddot{x}_\alpha + \ddot{x}_\beta \ddot{x}^\beta \dot{x}_\alpha = 0; \qquad \text{(I)}$$

уравнения Матиссона-Папапетру с условием Пирани для частицы с постоянным спином s_α в плоском пространстве-времени M

$$m\ddot{x}_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \dddot{x}^\beta \dot{x}^\gamma s^\delta = 0, \quad s_\beta \dot{x}^\beta = 0; \qquad \text{(2)}$$

и уравнения Дирака-Лоренца

$$m\ddot{x}_\alpha - \frac{2}{3} e^2 (\dddot{x}_\alpha - \ddot{x}_\beta \ddot{x}^\beta \dot{x}_\alpha) = e H_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta.$$

Рассматриваются уравнения Эйлера-Пуассона $\mathcal{E}_\alpha(x', x'', x''') = 0$, инвариантные относительно замены параметра ζ, дифференцирование по которому обозначено штрихом. Им естественным образом соответствует дифференциальная форма $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\alpha d\zeta \otimes dx^\alpha$ со значениями в кокасательном расслоении T^*M. Если, более общим образом, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ система дифференциальных форм со значениями в расслоениях $F_1, \ldots, F_n$, обозначим $\mathcal{M}(\omega_1, \ldots, \omega_n; E)$ модуль форм со значениями в расслоении E вида $\sum_{i=1}^{n} \Omega^i \wedge \omega_i$, где Ω^i есть форма со значениями в расслоении $Hom(F_i, E)$. Пусть μ контактная форма. Мы определяем новую дифференциальную форму $\varepsilon = \varepsilon_\alpha \otimes dx^\alpha$, коэффициенты которой зависят только от x' и x'', такую, что

$$\mathcal{E} = \varepsilon \ (mod\ \mathcal{M}(\mu; T^*M)).$$

ЛЕММА I [2]. Уравнения $\mathcal{E}_\alpha(x', x'', x''') = 0$ тогда и только тогда являются параметрически-инвариантными уравнениями Эйлера-Пуассона, когда найдутся зависящие от переменной x' кососимметрическая матрица A, симметрическая матрица B и столбец c такие, что

$$\varepsilon_\alpha = A_{\alpha\beta}\, dx''^\beta + (x''^\gamma \partial_{x'^\gamma} A_{\alpha\beta})\, dx'^\beta + B_{\alpha\beta}\, dx'^\beta + c_\alpha\, d\zeta.$$

и удовлетворяются условия

$$\partial_{x'[\alpha} A_{\beta\gamma]} = 0, \quad \partial_{x'[\alpha} B_{\beta]\gamma} = 0, \quad \partial_{x'(\alpha} c_{\beta)} = 0, \quad \partial_{x'\alpha} \partial_{x'[\beta} c_{\gamma]} = 0;$$

$$(x' \cdot \partial_{x'}) A + 2A = 0, \quad (x' \cdot \partial_{x'}) B + B = 0, \quad (x' \cdot \partial_{x'}) c - c = 0, \quad x'_\alpha \varepsilon^\alpha = 0.$$

Пусть $h_{(2)}$ второе продолжение преобразования h пространства-времени M. Обозначим $v = x'$.

ЛЕММА 2. Уравнения $\mathcal{E}_{\alpha}(v, v', v'') \doteq 0$ тогда и только тогда инвариантны относительно преобразования h, когда

$$h_{(2)}{}^{*}\varepsilon = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{M}(\varepsilon, \mu; h^{*}T^{*}M)).$$

Лемма 2 позволяет находить релятивистские уравнения Эйлера-Пуассона, даже когда не существуют инвариантные лагранжианы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. В трехмерном плоском пространстве-времени существует только однопараметрическое m-семейство Пуанкаре-инвариантных уравнений Эйлера-Пуассона третьего порядка

$$\frac{v''\times v}{|v|^3} - 3\,\frac{v\cdot v'}{|v|^5}\,v'\times v + m\,\frac{|v|^2 v' - (v'\cdot v)\,v}{|v|^3} = 0,$$

общий вид лагранжиана для которого

$$L = \frac{1}{2|v|}\left[\frac{v_1' v_0 - v_0' v_1}{v_0^2 - v_1^2}\,v_2 - \frac{v_2' v_0 - v_0' v_2}{v_0^2 - v_2^2}\,v_1\right] + v'\frac{\partial}{\partial v} f + c\cdot v - m|v|,$$

где произвольная функция $f(v)$ удовлетворяет условию $v\cdot\partial_v f = 0$. Выбором постоянной $m = 0$ и условием $|v| = 1$ отсюда получается уравнение, эквивалентное (I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Не существует Пуанкаре-инвариантного лагранжиана для уравнения третьего порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Не существует Пуанкаре-инвариантного уравнения Эйлера-Пуассона третьего порядка в четырехмерном пространстве-времени.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Уравнение (2) включается в двухпараметрическое $(m^{\#}, k)$-семейство уравнений Эйлера-Пуассона с интегралом движения $s\cdot v/|v| = k$

$$\frac{*(v''\wedge v\wedge s)}{|s\wedge v|^3} - 3\,\frac{(s\wedge v)\cdot(s\wedge v')}{|s\wedge v|^5}\,*(v'\wedge v\wedge s) - \frac{m^{\#}}{|s|^3}\,\frac{|v|^2 v' - (v\cdot v')\,v}{|v|^3} = 0$$

Условием $|v| = 1$ отсюда получается уравнение, эквивалентное (2) с постоянной $m = m^{\#}[1 - (s\cdot\dot{x})^2/|s|^2]^{3/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Не существует лагранжиана второго порядка для уравнения Дирака-Лоренца.

Предложения (I)-(3) уточняют предположения [3] (формула (4)). Случай двумерного пространства-времени рассматривался в (I).

ЛИТЕРАТУРА: I. Р.Я.Мацюк, в сб. Мат.методы и физ.мех.поля, вып.16, Киев: Наукова думка, 1982, 84-88. 2. Р.Я.Мацюк, там же, вып.20, 16-19, 1984. 3. Р.Я.Мацюк, в сб. Граничные задачи математической физики, Киев: Наукова думка, 1981, 79-81.